СЕВЕРО-ЗАПАДНАЯ АКАДЕМИЯ
ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
Кафедра мировой и национальной экономики

Учебно-методический комплекс по курсу

«ФИНАНСОВЫЙ РЫНОК: РАСЧЕТ И РИСК»

Издательство СЗАГС
2004

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры 16 апреля 2004 г., протокол № 10

Одобрено на заседании учебно-методического совета СЗАГС

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом СЗАГС

Учебно-методический комплекс подготовил проф. Клоков В. И.

Выписка из образовательного стандарта

Рынок ценных бумаг

Рынок ценных бумаг как альтернативный источник финансирования экономики. Понятие ценной бумаги. История появления ценных бумаг. Классические виды ценных бумаг и их характеристика (акции, частные облигации, государственные ценные бумаги). Производные ценные бумаги и их характеристика (конвертируемые акции и облигации, варранты, опционы и фьючерсы). Финансовые инструменты на рынке ценных бумаг (векселя, депозитные, сберегательные, инвестиционные сертификаты, секъюритизация частных долгов). Международные ценные бумаги (евроноты, еврооблигации, евроакции). Рынок ценных бумаг и его структура (западная модель). Первичный рынок ценных бумаг и его характеристика. Методы размещения ценных бумаг. Участники первичного внебиржевого рынка ценных бумаг. Вторичный биржевой рынок ценных бумаг (фондовая биржа). Организационная структура и функции фондовой бирже. Основные операции и сделки бирже. Биржевая информация (биржевые индексы и их характеристика). ... Участники вторичного рынка. Брокерские компании (организации, функции, механизм операций). Торговая регистрация, сопоставление и расчетный процесс. Механизмы принятия решений на рынке ценных бумаг (фундаментальный и технический анализ). Эмиссия ценных бумаг. ... Инвестиционная деятельность кредитно-финансовых институтов на рынке ценных бумаг (западная и российская модели) — банков, страховых компаний, инвестиционных компаний, пенсионных фондов и прочих институтов. Рынок ценных бумаг Российской Федерации.

Инвестиции

Инвестиционные качества ценных бумаг. Формы рейтинговой оценки. Доходность и риск в оценке эффективности инвестиций в ценные бумаги. Понятие инвестиционного портфеля. Типы портфеля, принципы и этапы формирования. Доход и риск по портфелю. Модели формирования портфеля инвестиций. Оптимальный портфель. Стратегия управления портфелем.

Цели и задачи дисциплины

Дисциплина предназначена для:

- изучения студентами аппарата финансового анализа, включающего анализ финансового и фондового рынка, финансовые вычисления, оценки финансовых рисков, построение оптимального портфеля ценных бумаг, статистику финансового рынка, стратегия и тактика инвестиционного менеджмента;
- выработки у студентов умения проводить строгий логический и количественный финансовый анализ социально-экономических задач на базе математических моделей;
- формирования у студентов необходимой финансово-экономической культуры и научного мировоззрения для исследования и решения задач управления в социально-экономических системах.

Развитие финансово-экономической культуры должно включать в себя ясное понимание необходимости финансового анализа в общей подготовке экономиста, выработку представления о роли и месте финансовой математики в современной экономике.

В результате изучения дисциплины студент должен:

иметь представление:

- о месте и роли финансового анализа и финансовой математики в современном мире;
- об истории развития финансового анализа;
- об основных структурах современного финансового анализа;
- о перспективах развития приложений финансового анализа, финансовой математики и математического моделирования в социально-экономической сфере.

знать и уметь использовать:

- основные понятия и методы финансового анализа
- основные определения и понятия, правила предметных направлений финансовой математики с практическим применением;

Для выработки у современных специалистов по управлению социально-экономическими системами с высшим образованием необходимой финансово-экономической культуры программа предусматривает реализацию следующих основных задач:

1. достижение достаточно высокого уровня фундаментальной финансово-математической подготовки;
2. сбалансированное и взаимосвязанное изучение финансового анализа финансовой математики и их приложений к социально-экономическим процессам;

3. ориентация на обучение и выработку у студентов умения строить и использовать финансово-экономические математические модели для описания и прогнозирования различных явлений, осуществлять их качественный и количественный анализ на базе различных средств информационного обеспечения.

Программа содержит основные финансово-экономические сведения, которые подлежат изучению всеми студентами.

Виды занятий и методики обучения

Программа по курсу финансовый рынок: расчет и риск составлена в объеме 51 аудиторных часов.

Курс изучается в одном семестре. Последовательность изложения разделов и тем курса, количество часов на каждый раздел составляется в соответствии с потребностями в аппарате финансового анализа другими дисциплинами согласно общему учебному плану.

На лекциях излагается содержание курса, проводится анализ основных понятий и методов финансового анализа. Чтение лекций организуется по потокам и сопровождается рассмотрением примеров, соответствующих основным положениям лекций и должно быть логичным, наглядным, ориентированным на последующие приложения излагаемого материала в других дисциплинах.

На лекции отводится примерно 50% аудиторного времени (26 часов). На практических занятиях, проводимых по группам, студент овладевает основными методами и приемами решения финансово-экономических задач, а также получает разъяснение теоретических положений курса. При подборе задач следует стремиться выбирать те, которые возникают в соответствующих приложениях и в процессе решения задач давать необходимую интерпретацию и трактовку. Последние три практических занятия происходят в компьютерном классе.

При проведении практических занятий со студентами рекомендуется обращать особое внимание:

- на развитие аналитических и вычислительных способностей при решении финансово-экономических задач и формирование соответствующих навыков;
- на привитие навыков составления и анализа финансово-математических моделей простых реальных задач;
- на выработку умения решать прикладные задачи, связанные с будущей экономической специальностью студента, требу-

ющие отбора данных и предварительного вывода аналитических зависимостей;
- методам контроля правильности решения задач.

Для приобретения навыков правильной организации финансово-экономических вычислений и умения пользоваться вычислительными средствами, предусмотрены занятия в компьютерных классах (практикум). Цель практикума: привить студенту практические навыки в алгоритмизации задач вычислительной финансовой математики, реализации алгоритмов на компьютерной технике. Общий объем практических и лабораторных работ, составляет 26 часа.

Самостоятельная работа студента является важной формой усвоения курса. Она должна состоять из непрерывной работы студента по выполнению текущих заданий, расчетной работы по финансовой математике, курсовой работы по финансовому анализу.

Общий объем самостоятельной работы установлен в 51 часов.

Формы контроля

Результативность самостоятельной работы студентов обеспечивается эффективной системой контроля, включающей в себя вопросы по содержанию материалов лекций и проверку, выполнения текущих заданий, контрольных работ, защиту курсовой работы (типовых расчетов), зачеты и экзамены.

Оперативный контроль. Опросы студентов по содержанию лекций и проверка выполнения текущих заданий проводится на каждом практическом занятии. Результаты проверки фиксируются и сообщаются студенту.

Рубежный контроль. В семестре, как правило, проводится 2 контрольные работы.

Контроль выполнения расчетной и курсовой работы проводится в два этапа:

1. предварительная проверка правильности письменного решения задания;
2. защита расчетной и курсовой работы.

Итоговый контроль. Семестр заканчивается зачетом.

Общее количество аудиторных часов

Лекции	26
Лабораторные и практические занятия	25
Итого	51

Раздел I. Учебно-тематический план дисциплины

№	Наименование темы	Всего часов	В том числе: Аудиторная работа: Лекции (час.)	Практические занятия (час.)	Самостоятельная работа	Форма контроля
1.	Структура финансового рынка	6	2		4	
2.	Финансовые вычисления	13	4	4	5	
3.	Потоки платежей	14	4	5	5	
4.	Финансовые вычисления по ценным бумагам	13	4	4	5	
5.	Финансовый риск	9	2	2	5	
6.	Портфель ценных бумаг	9	2	2	5	
7.	Построение оптимального портфеля ценных бумаг при рискованных вложениях. Задача Г. Марковица	10	2	2	6	
8.	Построение оптимального портфеля ценных бумаг при рискованных и безрисковых вложениях. Задача Д. Тобина	9	2	2	5	
9.	Статистика финансового рынка	10	2	2	6	
10.	Стратегия и тактика инвестиционного менеджмента	9	2	2	5	
	Рубежный контроль	Курсовая работа				
	Итоговый контроль	зачет				
	Итого	102	26	25	51	

Раздел II. Программа дисциплины

Введение

В настоящее время выбор правильной стратегии вложения денег в условиях разнообразия возможностей практически не возможен без использования специальной науки — финансового анализа (финансовой математики), элементы которого будут рассмотрены в данном курсе.

Тема 1. Структура финансового рынка

Общие свойства финансового рынка. Основные товары фондового рынка. Облигации, акции, векселя, государственные финансовые обязательства, опционы, фьючерсы, варранты и т. д. Действующие лица на фондовом рынке: эмитенты, инвесторы, посредники — брокерские конторы, фондовые биржи, инвестиционные фонды, банки, осуществляющие продвижение ценных бумаг от эмитентов к инвесторам. Роль в саморегуляции и обеспечении устойчивости фондового рынка спекулянтов, арбитражеров и хеджеров.

Тема 2. Финансовые вычисления

Понятия интереса (процентной ставки), дисконта и дисконт-фактора. Кредитование, дисконтирование и оценка эффективной ставки финансовой сделки. Расчет кредитования по схеме простых процентов. Расчет кредитования по схеме сложных процентов. Сравнение кредитования по схеме простых и сложных процентов. Расчет кредитования по схеме смешанных (комбинированных) процентов. Расчет дисконтирования по схеме простых процентов. Расчет дисконтирования по схеме сложных процентов. Дисконт-фактор. Дискретные вычисления и методы расчета в непрерывном случае, когда процент кредитования или дисконтирования начисляется непрерывно.

Тема 3. Потоки платежей

Сложные схемы расчетов финансовых потоков, когда имеются односторонние и двусторонние потоки платежей. Основные понятия и связи между ними. Финансовая рента (аннуитет) постнумерандо. Финансовая рента (аннуитет) пренумерандо. Расчет финансовой ренты (аннуитета) по непрерывной схеме. Двусторонние потоки платежей. Методы расчета для потока платежей эффективной ставки, которая оценивает целесообразность использования данного потока платежей.

Тема 4. Финансовые вычисления по ценным бумагам

Оценка облигаций с нулевым купоном. Оценка облигаций с фиксированной купонной ставкой. Оценка бессрочных облигаций с постоянным доходом. Оценка обыкновенных акций. Оценка акций с равномерно возрастающими дивидендами. Формула Гордона.

Тема 5. Финансовый риск

Понятия финансового риска. Пример использования неравенства Чебышева для оценки вероятности разорения инвестора. Хеджирование.

Тема 6. Портфель ценных бумаг

Портфель ценных бумаг. Основные понятия. Оценка риска портфеля ценных бумаг. Оценка риска портфеля из независимых ценных бумаг. Диверсификация портфеля. Оценка риска портфеля из коррелированных ценных бумаг. Оценка риска портфеля из антикоррелированных ценных бумаг.

Тема 7. Построение оптимального портфеля ценных бумаг при рискованных вложениях

Задача Г. Марковица (H. Markovitz) оптимизации портфеля ценных бумаг. Аналитическое решение задачи для случая, когда нет ограничений в виде неравенств. Численные методы решения задач оптимизации в общем случае. Программные средства для решения задачи оптимизации портфеля ценных бумаг.

Тема 8. Построение оптимального портфеля ценных бумаг при рискованных и безрисковых вложениях. Задача Д. Тобина

Задача Д. Тобина (D. Tobin) оптимизации портфеля инвестора в случае, когда ценные бумаги разбиты на две группы: безрисковых и рискованных ценных бумаг. Аналитическое и численное решение задачи. Программные средства для решения задачи оптимизации. Методы расчета премии за опцион.

Тема 9. Статистика финансового рынка

Статистика финансового рынка. Прямой метод расчета статистических характеристик ценных бумаг. Индекс Доу-Джонса. Метод ведущего фактора для расчета статистических характеристик ценных бумаг. Равновесие на конкурентном финансовом рынке. Цены равновесия на идеальном рынке.

Тема 10. Стратегия и тактика инвестиционного менеджмента

Функции посреднических структур на финансовом рынке. Традиционный фундаментальный анализ. Традиционный технический анализ фондового рынка. Метод наименьших квадратов. Современный технический анализ фондового рынка. Стиль и тактика менеджмента. Эффективность работы менеджера и аналитика.

Раздел III. Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. *Клоков В. И.* Финансовые риски: Методическое пособие. — СПб.: СЗАГС, 2002.
2. *Первозванский А. А., Первозванская Т. Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. — М.: Инфра-М, 1994.
3. *Уотшем Терри Дж., Паррамоу Кейт.* Количественные методы в финансах. — М.: Финансы изд. ЮНИТИ, 1999.
4. Финансовый менеджмент. Теория и практика. / Под ред. Е. С. Стояновой. — М.: Перспектива, 1999.
5. *Четыркин Е. М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. — М.: «Дело ЛТД», 1995.
6. *Четыркин Е. М.* Финансовый анализ производственных инвестиций. — М.: «Дело ЛТД», 1998.
7. *Шарп Уильям Ф. и др.* Инвестиции (университетский учебник) — М.: ИНФРА-М, 1998.
8. Экономико-математические методы и модели: Уч. пособие. — Минск: Изд-во БГЭУ, 1998.

Дополнительная литература

1. *Башарин Г. П.* Начала финансовой математики. 1997.
2. *Капельян С. П., Левкович О. А.* Основы коммерческих и финансовых расчетов. — Минск: НТЦ АПИ 1999.
3. *Ковалев В. В.* Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности. — М.: Финансы и статистика, 1998.
4. *Лабскер Л. Г.* Вероятностное моделирование в финансово-экономической области. — М.: Альпина Паблишер, 2002.
5. *Ширяев А. П.* Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели. Том 2. Теория. — М.: Фазис, 1998.
6. *Ширяев А. П.* Стохастические модели финансовой математики. — М., 2000
7. *Markovitz H. M.* Portfolio selection. // J. of Finances. V. 7. 1952. № 1. P. 77–91.
8. *Tobin D.* Liquidity preference as behavior toward risk. // Rev. of Econ. Studies. V. 25. 1958. № 1. P. 65–86.

Раздел IV. Планы практических занятий

Занятие 1. Финансовые вычисления

Основные понятия

Задача 1. Ссуда в размере 4 млн руб. дана на 1 год с условием возврата 8 млн руб. Найти процентную ставку и дисконт.

Задача 2. Кредит выдан на 15 млн руб. с кредитной ставкой 50% годовых. Сколько следует вернуть через год?

Задача 3. Кредит выдан с условием возврата через год 15 млн руб. и дисконтом 30%. Сколько получит дебитор?

Кредитование

Задача 4. Выдан кредит на сумму 12 млн руб. с 15.01.2001 г. по 15.03. 2001 г. под 120% годовых. Найти сумма погасительного платежа при точном расчете и приближенном расчете.

Задача 5. Ссуда в размере 50 тыс. руб. выдана на полгода по простой ставке процентов 12% годовых. Определить наращенную сумму.

Задача 6. Кредит в размере 20 млн руб. выдан 2 марта до 11 декабря под 30% годовых, год високосный. Определить размер наращенной суммы для различных вариантов расчета процентов: точное число дней ссуды и точная длительность года 366 дней; точное число дней ссуды и приближенная длительность года 360 дней; приближенные число дней ссуды и длительность года.

Задача 7. Определить период начисления, за который первоначальный капитал в размере 25 млн руб. вырастет до 40 млн руб., если используется простая ставка процентов 12% годовых.

Задача 8. Определить простую ставку процентов, при которой первоначальный капитал в размере 48 млн руб. достигнет 60 млн руб. через год.

Задача 9. Кредит выдается под простую ставку 16% годовых на 250 дней. Рассчитать сумму, получаемую заемщиком, и сумму процентных денег, если требуется возвратить 40 млн руб.

Сложные проценты

Задача 10. Первоначальная вложенная сумма равна 300 тыс. руб. Определить наращенную сумму через пять лет при использовании простой и сложной ставки процентов в размере 18% годовых. Рассмотреть случаи, когда сложные проценты начисляются ежегодно, по полугодиям и поквартально.

Смешанные или комбинированные проценты

Задача 11. Первоначальная сумма долга равна 150 млн руб. Определить наращенную сумму долга через 2,5 года, используя способ начисления сложных процентов по ставке 25% годовых.

Задача 12. Первоначальная сумма долга равна 10 млн руб. Определить наращенную сумму долга через 2,25 года, используя способ начисления сложных процентов по ставке 20% годовых.

Задача 13. 31 марта 2001 г. была получена в долг сумма 40 тыс. руб. под 20% годовых. Долг был возвращен 11 июня 2003 г. Какая сумма была возвращена?

Различные задачи

Задача 14. За какой срок первоначальный капитал 150 млн. руб. увеличится до 400 млн. руб., если: а) на него начисляются сложные проценты по ставке 28% годовых; б) проценты начисляются ежеквартально?

Дисконтирование

Простые ставки

Задача 15. Вексель выдан на сумму 12 млн руб. и содержит обязательство выплатить владельцу эту сумму 15.03.2001 г. Владелец предъявил банку вексель досрочно 01.02.2001 г., банк согласился выплатить сумму (учесть вексель), но с дисконтом 120% годовых. Найти полученную сумму.

Задача 16. Определить современную (текущую, настоящую, приведенную) величину суммы 50 млн руб., выплачиваемую через три года при использовании ставки сложных процентов 24% годовых.

Задача 17. Вексель на 3 млн руб. с годовой учетной ставкой 12% с дисконтированием 4 раза в год выдан на 2 года. Найти исходную сумму, которая должна быть выдана в долг под вексель.

Эффективная ставка

Задача 18. Найти эффективную ставку сделки, в результате которой первоначальный капитал утроился за 6 лет.

Задача 19. В долг дана сумма 2 млн руб. Через 2,5 года следует вернуть 4 млн руб. Найти эффективную ставку в данной сделке.

Задача 20. Выдан кредит в 2 млн руб. на 3 месяца под 90% годовых. Найти эффективную ставку, учитывая, что кредит краткосрочный.

Задача 21. Вексель 5 млн руб. выдан на 2 года с годовой учетной ставкой 10% с дисконтированием 2 раза в год. Найти эффективную ставку.

Задача 22. Остров Манхеттен был продан в 1624 г. за \$ 24. В 1976 г. его стоимость была \$ $40 \cdot 10^9$. Какова эффективная ставка сделки? Используя эффективную ставку, оценить современную стоимость острова Манхеттен.

Задача 23. Имеется вексель следующей формы:
«8000 руб. Санкт-Петербург. 1 сентября 2001 г. Обязуюсь уплатить через 60 дней после данной даты по распоряжению гражданина А 8000 руб. с процентной ставкой 12% годовых.
/подпись/ гражданин В».
За сколько банк купит вексель 1 октября 2001 г., если банковская процентная ставка 9,5%?

Непрерывная ставка (сила роста) и непрерывный дисконт

Задача 24. Ссуда 100 тыс. руб. дана на 2,5 года под ставку 10% годовых с ежеквартальным начислением. Найти сумму конечного платежа.

Задача 25. Вексель на 13 млн руб. с годовой учетной ставкой 8% и дисконтированием 2 раза в год выдан на 2 года. Найти исходную сумму, которая должна быть выдана в долг под этот вексель.

Занятие 2. Потоки платежей

Однонаправленные потоки платежей

Задача 26. Контракт предусматривает следующий порядок использования кредитной линии: 01.07.2001 г. — 15 млн руб., 1.01.2002 г. — 9 млн руб., 01.01.2004 г. — 18 млн руб. Необходимо определить сумму задолженности на начало 2005 г. и современную стоимость этого потока на начало срока при условии, что проценты начисляются по ставке 10% годовых.

Финансовая рента (аннуитет)

Задача 27. Кредит 10 млн руб. погашается 12 равными ежемесячными взносами. Найти сумму выплат при ставке 12% годовых.

Задача 28. Для приобретения недвижимости стоимостью 30 тыс. $ берется кредит под 6% годовых. Согласно контракту погашение кредита происходит каждый месяц в течение 30 лет. Какова сумма месячного платежа?

Двусторонние потоки платежей

Задача 29. Контракт между фирмой и банком предусматривает, что банк предоставляет в течение 3 лет кредит фирме ежегодными платежами в размере 2 млн $ в начале каждого года под ставку 10% годовых. Фирма возвращает долг, выплачивая 2,4 и 2 млн $ последовательно в конце 3, 4-го и 5-го года. Найти S(o) чистый приведенный доход (NPN) для банка.

Эффективная ставка операции

Задача 30. Ссуда в 20 млн руб. выдана под 12% годовых (т. е. 1% месячных) и требует ежемесячной оплаты по 260 тыс. руб.

и выплаты остатка долга к концу срока в 10 лет. Каков остаток долга?

Задача 31. Сравнить эффективность трех сделок:

1. В начале первого года банк дает фирме кредит в размере 3 млн руб. В конце второго года фирма возвращает 4 млн руб.
2. Банк дает фирме кредит два этапа: в начале первого года — 2 млн руб., в начале второго года — 1 млн руб. В конце второго года фирма возвращает 4 млн руб.
3. Банк дает фирме кредит два этапа: в начале первого года — 1 млн руб., в начале второго года — 2 млн руб. В конце второго года фирма возвращает 4 млн руб.

Задача 32. Сравнить эффективность трех сделок:

1. В начале первого года банк дает фирме кредит в размере 5 млн руб. В начале второго года фирма возвращает 2 млн руб. В конце второго года фирма возвращает 4 млн руб.
2. Банк дает фирме кредит два этапа: в начале первого года — 3 млн руб., в начале второго года — 2 млн руб. В конце второго года фирма возвращает 6 млн руб.
3. Банк дает фирме кредит два этапа: в начале первого года — 2 млн руб., в начале второго года — 3 млн руб. В конце второго года фирма возвращает 6 млн руб.
4. В начале первого года банк дает фирме кредит в размере 5 млн руб. В конце второго года фирма возвращает 6 млн руб.

Занятие 3. Финансовые вычисления по ценным бумагам

Оценка облигаций с нулевым купоном

Задача 33. Оценить текущую стоимость облигации с нулевым купоном номинальной стоимостью 1000 руб. и сроком погашения через 3 года. Ставка дисконта $r = 20\%$.

Оценка облигации с фиксированной ставкой

Задача 34. Оценить текущую стоимость облигации (PV) по номинальной стоимости 1 млн руб. с купонной ставкой r_k = 20%, дисконтом r = 12%. Срок погашения 5 лет.

Оценка бессрочных облигаций с постоянным доходом

Задача 35. Оценить текущую стоимость бессрочной облигации, если по ней ежегодно выплачивается доход 1 тыс. руб. Ставка дисконта r=10%.

Оценка обыкновенных акций

Задача 36. Оценить текущую стоимость акции, если каждый год дивиденд равен 100 тыс. руб. Ставка дисконта r = 5%.

Акции с равномерно возрастающими дивидендами

Задача 37. Компания начальный дивиденд D = 10 тыс. руб. ежегодно наращивает с темпом роста q = 3%. Найти текущую стоимость акций компании при ставке дисконта r = 8%.

Занятие 4. Финансовый риск

Неравенство Чебышева

Теорема Чебышева

Вероятность того, что случайная величина R отклонится от своего математического ожидания m больше, чем заданное значение δ, не превосходит ее дисперсии σ^2, деленной на δ^2, т. е.

$$P\left(\left|R-m\right|>\delta\right)\leq\frac{\sigma^2}{\delta^2}, \qquad (4.4)$$

где P(*) обозначает вероятность события*.

Воспользоваться теоремой Чебышева для решения следующей задачи.

Задача 38. Господин А делает заем под процент r и под залог недвижимости. На полученные взаймы деньги господин А покупает акции. Пусть эффективность R покупаемых господином А акций характеризуется математическим ожиданием дохода m и дисперсией σ^2, оценивающей рискованность финансовой операции. Найти соотношение между r, m, s, при которой вероятность того, что господин А не сможет вернуть долг и лишится недвижимости меньше или равна 0,04.

Хеджирование

Для иллюстрации хеджирования рассмотрим следующий модельный пример.

Инвестор-кредитор А собирается вложить сумму C в дело под r процентов. Ожидаемый доход равен $R = Cr$. Однако операция инвестору представляется рискованной, и он решает приобрести страховой полис, гарантирующий выплату определенной суммы в случае провала сделки.

Для этого сумму C инвестор разделяет на две части: Cx он вкладывает в сделку и $C(1-x)$ он тратит на страховку, где x, $1-x$ — доля суммы, потраченная на финансовую сделку и страховой полис соответственно. Возможны два варианта развития событий.

Вариант 1:

Сделка оказалась удачной.

В результате получен доход: $R_1 = C(1+r)x - C$.

Вариант 2:

Сделка не удалась. Инвестор получает страховую выплату в размере $C(1-x)q$, где q — отношение страхового возмещения к цене полиса. Тогда полученный доход равен: $R_2 = C(1-x)q - C$.

Очевидно, логично выбрать x так, чтобы доход в обоих случаях был одинаков $R_1 = R_2$. Решив линейное уравнение, получим:

$$x = \frac{q}{1 + r + q}.$$

При этом доход будет равен:

$$R = R_1 = R_2 = \left(\frac{(1+r)q}{1+r+q} - 1 \right) C.$$

Таким образом, данная схема хеджирования исключает неопределенность, при этом эффективность сделки снижается с r до $\frac{(1+r)q}{1+r+q} - 1$.

Задача 39. Рассмотреть численный пример хеджирования. Пусть $r = 0{,}1$, а $q = 40$. Найти долю средств, отпускаемых на сделку и долю средств на страховку. Определить эффективность хеджирования.

Занятие 5. Портфель ценных бумаг. Построение оптимального портфеля ценных бумаг при рискованных вложениях

Задача 40. Осторожный инвестор формирует портфель из 3-х ценных бумаг. Средняя эффективность портфеля из 3-х ценных бумаг равна $ms = 0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}18x_3$, где xk – доля средств затраченных на k-ю ценную бумагу.

Риск сделки, определенный как дисперсия ее эффективности, равен $V = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3$.

При этом предполагается, что выполнено условие баланса $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Найти структуру портфеля ценных бумаг, обеспечивающую минимальный риск. Найти соответствующий минимальный риск и соответствующую среднюю эффективность оптимального портфеля. Сравнить доходность и риск оптимального портфеля ценных бумаг со случаями:

– вложения всех средств в наиболее доходную;
– в наименее рискованную ценную бумагу;
– со случаем вложения всех средств равными порциями во все ценные бумаг.

Задача 41. Инвестор формирует портфель из 4 ценных бумаг, одна из которых является государственной безрисковой бумагой. Средняя эффективность портфеля из 4 ценных бумаг равна , где xk — доля средств затраченных на k-ю ценную бумагу, в частности, x_0 средств затрачено на безрисковую ценную бумагу.

Риск сделки, определенный как дисперсия эффективности, равен $V = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$

При этом предполагается, что выполнено условие баланса $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Найти структуру портфеля ценных бумаг, обеспечивающую минимальный риск при фиксированной доходности. Найти соответствующий минимальный риск. Сравнить доходность и риск оптимального портфеля ценных бумаг со случаями вложения всех средств в наиболее доходную и в наименее рискованную ценную бумагу и равными частями во все ценные бумаги.

Раздел V. Словарь терминов и персоналий

Акции (от фр. *action*) — это ценные бумаги, удостоверяющие право их владельца на долю собственности акционерной компании, включая право на участие путем голосования в принятии основных решений и право на получение дивидендов из прибылей компании.

Будущее значение или наращенная сумма, future value.S(t), FV — определяется путем приведения всех платежей с учетом роста к конечному моменту действия контракта (или к моменту последнего платежа).

Варрант (от англ. *warrant* — полномочие) — доверенность (свидетельство), выдаваемая складом владельцу товара.

Вексель (от нем. *Wechsel*) — ценная бумага, удостоверяющая безусловное денежное обязательство векселедателя уплатить по наступлении срока определенную сумму денег владельцу векселя.

Государственные долговые обязательства — ценные бумаги, удостоверяющие отношения займа, в которых должником выступает государство, органы государственной власти и управления.

Двусторонний поток платежей — поток платежей, у которого суммы $c_1, c_2, ...c_n$ — выплачиваемые в моменты времени $t_1, t_2, ... t_n$, могут иметь любой знак, при этом поступлениям денег в моменты t_k соответствуют положительные величины c_k, а выплатам в моменты t_n соответствуют отрицательные величины c_n.

Депозитный сертификат банка — обязательство банка по выплате размещенных у него депозитов.

Диверсификации портфеля ценных бумаг — стремление к нулю риска портфеля при росте числа независимых ценных бумаг, включенных в портфель.

Дисконтом d (относительной скидкой, относительным уменьшением конечного капитала, discount rate) — называют отношение разности полученной суммы $S(t)$ минус выданная сумма $S(o)$, к полученной суммы $S(t)$.

Инвестиции — в широком смысле слова означают «расстаться с деньгами сегодня, чтобы получить большую их сумму в будущем».

Инвестиционный процесс — состоит из выбора инвестиционной политики; анализа рынка ценных бумаг; формирования портфеля ценных бумаг; пересмотра портфеля ценных бумаг; оценки эффективности портфеля ценных бумаг.

Контракт на поставку в будущем (фьючерс, от англ. *futures*) — это обязательство продавца поставить к определенной дате определенное количество товара в определенное место по ценам, фиксируемым в момент заключения сделки.

Облигации или долговые обязательства (от лат. *obligatio* — обязательства) — ценная бумага, удостоверяющая отношение займа между *кредитором*, владеющим облигацией, и должником — *эмитентом* облигации.

Оптимальный портфель — распределение средств, выделяемых на покупку ценных бумаг так, чтобы при фиксированной эффективности обеспечить минимальный риск.

Опцион (от нем. *option* — выбор) — привилегия, приобретаемая при уплате известной *премии на бирже*, на покупку или продажу товара по заранее установленной цене в определенный момент времени (европейский опцион) или вплоть до определенного времени (американский опцион).

Первичные ценные бумаги — являются правами на имущество, денежные средства, продукцию, землю и другие первичные ресурсы.

Периодом ренты (*rent period*, *payment period*) — называют интервал времени между выплатами.

Портфелем ценных бумаг инвестора — называется совокупность некоторого количества ценных бумаг различного типа — векселей, акций нескольких корпораций, контрактов, опционов и т. д.

Поток платежей — такие взаимоотношения между кредитором и дебитором, при которых производятся многократные выплаты в различные промежутки времени, т. е. в моменты времени t_1, t_2, ... t_n, осуществляются выплаты сумм c_1, c_2, ...c_n — соответственно.

Производные (вторичные) ценные бумаги — это ценные бумаги, удостоверяющие право владельца на покупку или продажу первичных ценных бумаг.

Простая рента — означает выплаты одной суммы.

Процентной ставкой r (относительным приращение суммы или капитала, интересом, interest rate, return) — называют отношение разности полученной суммы *S(t)* минус выданная сумма *S(o)*, к выданной сумме *S(o)*.

Реальные инвестиции — инвестиции в какой-либо тип материально осязаемых активов, таких, как земля, оборудование, заводы и т. д.

Рента называется **безусловной рентой,** если заранее оговариваются моменты всех выплат — от первой до последней выплаты.

Рента называется **рента постнумерандо (аннуитет постнумерандо, обыкновенный аннуитет)**, если выплаты производятся в конце периода.

Рента называется **рента пренумерандо (аннуитет пренумерандо, авансированный аннуитет)**, если выплаты производятся в начале периода

Рискованной называется финансовая операция (сделка), если ее эффективность недетерминирована, т. е. не известна в момент заключения сделки.

Сложная рента предполагает выплаты переменных сумм.

Современное значение, present value, S(o), PV — величина, используемая для оценки потока платежей, равная приведенной с учетом дисконтирования к начальному моменту денежной суммы потока всех платежей; точнее — начальная сумма, вложив которую под проценты r, можно обеспечить к моменту t возможность выплаты из нее всех рентных платежей.

Сроком ренты *(temp)* — называется время от начала первого периода ренты до конца последнего периода.

Финансовой рентой — называют поток платежей, у которого все выплаты одного знака и производятся через равные промежутки времени.

Финансовые инвестиции — инвестиции в какие-либо ценные бумаги.

Финансовый рынок — это рынок, где товарами являются сами деньги, банковские кредиты, ценные (денежные) бумаги и финансовые услуги.

Фондовый рынок (*security packet*) — рынок ценных бумаг.

Хеджирование (hedging) — любая схема, позволяющая исключить или ограничить риск финансовых операций, связанных с ценными бумагами

Ценная бумага — это юридический документ на право собственности, на доход или совершение какой-либо сделки.

Чистое будущее значение или чистая наращенная сумма, S(t), NFV (netto FV), чистое FV — определяется путем приведения всех положительных и отрицательных платежей с учетом роста к конечному моменту действия контракта (или к моменту последнего платежа).

Чистое современное значение или чистый приведенный доход, S(o), NPV (netto PV), чистое PV — величина, используемая для оценки двустороннего потока платежей, равная приведенной с учетом дисконтирования к начальному моменту денежной суммы потока всех положительных и отрицательных платежей.

Членом ренты (*rent*) называют размер отдельного платежа.

Эффективной — называют годичную ставку сложных процентов, обеспечивающую заданное отношение полученной суммы *S(t)* к выданной сумме *S(o)*, независимо от того, какая схема оплат используется в данной конкретной сделке.

Эффективной ставкой (внутренней эффективностью) финансовой операции — называется значение ставки процента r, при котором *S(o)* чистое приведенное современное значение (NPV) равно нулю.

Раздел VI. Примерные темы курсовых работ

1. Фондовые биржи США.
2. Фондовые биржи Европы и Азии.
3. Фондовые биржи России.
4. Процентные ценные бумаги на рынке США.
5. Процентные ценные бумаги на рынке Европы и Азии.
6. Процентные ценные бумаги на рынке России.
7. Акции корпораций США.
8. Акции корпораций Европы и Азии.
9. Организация рынка ценных бумаг в США.
10. Акции корпораций России.
11. Организация рынка ценных бумаг в России.
12. Сбор и анализ курсов основных акций (10–20) США.
13. Сбор и анализ курсов основных акций (10–20) России.
14. Статистический анализ ценных бумаг.
15. Построение оптимального портфеля ценных бумаг.

Раздел VII. Примерный перечень вопросов к итоговой аттестации

1. Товары финансового рынка.
2. Фондовый рынок.
3. Первичные ценные бумаги.
4. Вторичные ценные бумаги.
5. Действующие лица фондового рынка.
6. Финансовые вычисления. Понятия интереса (процентной ставки), дисконта и дисконт-фактора.
7. Расчет кредитования по схеме простых процентов.
8. Расчет кредитования по схеме сложных процентов.
9. Сравнение кредитования по схеме простых и сложных процентов.
10. Расчет кредитования по схеме смешанных (комбинированных) процентов.
11. Расчет дисконтирования по схеме простых процентов.
12. Расчет дисконтирования по схеме сложных процентов. Дисконт-фактор.
13. Эффективная ставка финансовой сделки.
14. Непрерывная ставка (сила роста).
15. Непрерывный дисконт.
16. Однонаправленные потоки платежей. Основные понятия и связи между ними.
17. Финансовая рента (аннуитет) постнумерандо.
18. Финансовая рента (аннуитет) пренумерандо.
19. Расчет финансовой ренты (аннуитета) по непрерывной схеме.
20. Двусторонние потоки платежей. Основные понятия и связи между ними.
21. Эффективная ставка потока платежей.
22. Финансовые вычисления по ценным бумагам. Оценка облигаций с нулевым купоном.
23. Оценка облигаций с фиксированной купонной ставкой.
24. Оценка бессрочных облигаций с постоянным доходом.
25. Оценка обыкновенных акций.
26. Оценка акций с равномерно возрастающими дивидендами. Формула Гордона.
27. Финансовый риск. Основные понятия.

28. Использование неравенства Чебышева для оценки рискованности финансовой операции.
29. Хеджирование.
30. Портфель ценных бумаг. Основные понятия.
31. Оценка риска портфеля ценных бумаг.
32. Оценка риска портфеля из независимых ценных бумаг. Диверсификация портфеля.
33. Оценка риска портфеля из коррелированных ценных бумаг.
34. Оценка риска портфеля из антикоррелированных ценных бумаг.
35. Построение оптимального портфеля ценных бумаг при рискованных вложениях. Задача Г. Марковица.
36. Построение оптимального портфеля ценных бумаг при рискованных и безрисковых вложениях. Задача Д. Тобина.
37. Методы расчета премии за опцион.
38. Статистика финансового рынка.
39. Прямой метод расчета статистических характеристик ценных бумаг. Индекс Доу-Джонса.
40. Метод ведущего фактора для расчета статистических характеристик ценных бумаг.
41. Равновесие на конкурентном финансовом рынке.
42. Цены равновесия на идеальном рынке.
43. Стратегия и тактика инвестиционного менеджмента.
44. Функции посреднических структур на финансовом рынке.
45. Традиционный фундаментальный анализ.
46. Традиционный технический анализ фондового рынка.
47. Современный технический анализ фондового рынка.
48. Стиль и тактика менеджмента. Эффективность работы менеджера и аналитика.

Раздел VIII. Лекции

Введение

Несмотря на то что в последнее время появилось достаточно много работ, посвященных рыночной экономике, до сих пор учебно-методических пособий, рассматривающих вопросы финансовой математики, в том числе вопросы построения методов оценки финансовых рисков и способов формирования оптимального портфеля ценных бумаг, явно недостаточно.

Данное пособие составлено на основании курса лекций «Финансовый рынок: расчет и риск», читаемого СЗАГС.

В работе рассмотрены следующие вопросы.

В *части 1* представлены общие свойства финансового рынка и основные товары финансового рынка: облигации, акции, векселя, государственные финансовые обязательства, опционы, фьючерсы, варранты и т. д.

Часть 2 посвящена финансовым вычислениям: кредитованию, дисконтированию и оценке эффективной ставки. Наряду с дискретными вычислениями приведены методы расчета в непрерывном случае, когда процент кредитования или дисконтирования начисляется непрерывно.

В *части 3* приведены более сложные схемы расчетов финансовых потоков, когда имеются односторонние и двусторонние потоки платежей. Рассмотрены методы расчета для потока платежей эффективной ставки, которая оценивает целесообразность использования данного потока платежей. Подробно изложены способы расчета частного случая потока платежей: аннуента или финансовой ренты, когда выплаты производятся через равные промежутки времени. Приведены основные формулы и примеры их использования для расчетов по ценным бумагам.

Основные элементы финансовой математики, приведенной в частях 2, 3, носят универсальный характер и могут быть использованы как для финансовых расчетов по ценным бумагам, так и для финансовых расчетов производственной деятельности.

Последующие части посвящены в основном описанию процессов, происходящих на фондовом рынке.

В *части 4* вводятся понятия финансового риска и хеджирования. Приведен пример использования неравенства Чебышева для оценки вероятности разорения инвестора.

В *части 5* приведены основные характеристики портфеля ценных бумаг. Оценены эффективность и риск портфеля ценных бумаг для случаев, когда ценные бумаги некоррелированные, коррелированные и антикоррелированые.

В *части 6* рассмотрена задача Г. Марковица (H. Markovitz) оптимизации портфеля ценных бумаг. Приведено аналитическое решение задачи для случая, когда нет ограничений в виде неравенства, и описаны численные методы решения задач оптимизации в общем случае.

В *части 7* рассмотрена задача Д. Тобина (D. Tobin) оптимизации портфеля инвестора в случае, когда ценные бумаги разбиты на две группы: безрисковых и рискованных ценных бумаг. Приведены аналитическое и численное решение задачи.

Часть 1. Товары финансового рынка

Финансовый рынок — это рынок, где товарами являются сами деньги, банковские кредиты, ценные (денежные) бумаги и финансовые услуги.

Финансовый рынок соответственно делится на денежный рынок и рынок капитала, который делится на кредитный и фондовый рынок. Основным предметом нашего исследования будет фондовый рынок (security packet), т. е. рынок ценных бумаг.

Ценная бумага — это юридический документ на право собственности, на доход или совершение какой-либо сделки.

Ценные бумаги могут быть: на предъявителя, именные и ордерные (в этом случае фиксированы, кто выдал и кто предъявляет ценную бумагу). Среди ценных бумаг выделяют две группы: первичные и вторичные ценные бумаги.

Первичные ценные бумаги являются правами на имущество, денежные средства, продукцию, землю и другие первичные ресурсы. К первичным ценным бумагам относят облигации, акции, государственные долговые обязательства, векселя, депозитные сертификаты.

Облигации или долговые обязательства (от лат. *obligatio* — обязательства) — ценная бумага, удостоверяющая отношение займа между *кредитором*, владеющим облигацией, и должником — *эмитентом* облигации. Облигация удостоверяет внесение ее владельцем денежных средств и подтверждает обязательство возместить ему номинальную стоимость облигации в заранее установленный срок, с уплатой фиксированного процента (fixed income securities) или иное предусмотренное условиями выпуска.

Выпускаются облигации внутренних государственных и местных займов и облигации предприятий. Они могут быть именными, на предъявителя, процентными и беспроцентными, свободно обращающими или с ограниченным кругом обращения. В зависимости от длительности действия существуют облигации краткосрочные (до 3 лет), среднесрочные (от 3 до 7 лет), долгосрочные (от 7 до 20 лет), бессрочные. Облигации бывают обычными или конвертируемыми, которые могут быть обменены в любой момент на акции. Способы обеспечения облигаций: имущественный залог, залог от доходов будущей деятельности, залог гарантийных обязательств.

Доход по облигации выплачивается путем оплаты их *купонов* или при погашении займов начислением процентов к номиналу. Точнее, по способу формирования дохода облигации подразделяются на облигации, у которых:

- фиксированная процентная ставка (стоимость облигации 1000 руб., доход — 4%, доход по полугодовому купону — 2%);
- плавающая купонная ставка (обычно привязана к доходности каких-либо других ценных бумаг);
- равномерно растущая ставка (на пример, для учета инфляции);
- нулевой купон (бескупонная, нуль купонная, дисконтная облигация) — пример такой облигации ГКО, МКО.

Чем чаще выплаты, тем выше доходность облигации.

Пример: Номинальная стоимость облигации 1000 руб., срок действия — 5 лет, годовая процентная ставка 5%. В этом случае доход при годовой процентной ставке:
$S_1 = 1000\,(1+0{,}05)^5 = 1276{,}3.$
При полугодовом купоне имеем
$S_{1/2} = 1000\,(1+0{,}025)^{10} = 1280{,}1.$

Существуют рейтинги корпоративных облигаций со специальными оценками: А++– — высшего качества, А+– — очень хорошие, А — хорошие, В++– — средние, В– — плохие и пр.

Наибольший интерес для фондового рынка представляют долговые обязательства, которые кредитор может свободно продавать другим лицам. Именно они составляют основную массу средств, обращающихся на фондовом рынке.

Акции (от фр. *action*) — это ценные бумаги, удостоверяющие право их владельца на долю собственности акционерной компании, включая право на участие путем голосования в принятии основных решений и право на получение дивидендов из прибылей компании. Акции имеют номинальную, эмиссионную, балансовую, ликвидационную и рыночную (курсовую) цену. *Номинальная* цена указана на бланке акции, она отражает долю уставного капитала, приходящуюся на одну акцию в момент учреждения общества. *Эмиссионная* цена — цена, по которой акция продается при первичном размещении. *Балансовая* цена — это цена, рассчитанная по балансу, как отношение стоимости чистых активов к общему числу выпущенных акций. *Ликвидационная* цена определяется в момент ликвидации акционерного общества. *Рыночная* (курсовая) цена — та цена, по которой акция котируется на фондовом рынке.

По условиям выплаты дивидендов акции бывают:

– *привилегированными*, они не дают акционеру право на участие в управлении АО и дают акционеру преимущественное право на получение фиксированных дивидендов, которые выплачиваются до того, как распределяют дивиденды по обычным акциям;
– *обычными акциями*, которые дают право на участие в управлении АО, при этом размер выплачиваемых дивидендов зависит от финансовых результатов деятельности АО и решений собрания акционеров.

Акции в отличие от облигаций выпускаются на бессрочный период. В случае банкротства АО акционеру возвращается ликвидационная стоимость акции.

Акции компаний открытого типа являются свободно продаваемыми и покупаемыми и представляют собой наиболее активную часть фондового рынка.

Пример: Уставный капитал АО равен 400 млн Выпущено 1 млн обычных и 1 млн привилегированных акций с дивидендом 8%. Чистая распределяемая прибыль АО равна 40 млн На привилегированные акции приходится 200 млн уставного капитала. Тогда сумма выплат по привилегированным акциям составит 200*0,08 = 16 млн Остаток 24 млн — на выплаты по обычным акциям. Тогда доходность обычных акций равна 24 / 200 = 12%.

Вексель (от нем. *Wechsel*) — ценная бумага, удостоверяющая безусловное денежное обязательство векселедателя уплатить по наступлении срока определенную сумму денег владельцу векселя. Участие банков в вексельном обращении заключается в предоставлении векселедержателю дисконтного кредита путем покупки векселя до срока.

Государственные долговые обязательства — ценные бумаги, удостоверяющие отношения займа, в которых должником выступает государство, органы государственной власти и управления.

Депозитный сертификат банка — обязательство банка по выплате размещенных у него депозитов.

Производные (вторичные) ценные бумаги — это ценные бумаги, удостоверяющие право владельца на покупку или продажу первичных ценных бумаг. К ним относятся: опционы, фьючерсы, варранты, подписные права и т. д.

Опцион (от нем. *option* — выбор) — привилегия, приобретаемая при уплате известной *премии на бирже*, на покупку или продажу товара по заранее установленной цене в определенный момент времени (европейский опцион) или вплоть до определенного времени (американский опцион). Товаром может быть что угодно (золото, иностранная валюта, акции и т. п.). Риск покупателя опциона ограничен премией, выплаченной за опцион, риск продавца опциона снижается на величину полученной премии.

Опцион дает право совершить определенную сделку, причем условия сделки не являются обязательными. Опционы бывают двух типов: опцион на право покупки — *опцион колл (coll)* и опцион на право продажи — *опцион пут (put)*.

Пример. Инвестор А рассчитывает на повышение курса акций, инвестор В рассчитывает на понижение курса. Текущий курс акций $ 30. А покупает у В опцион на покупку через 3 месяца пакета из 100 акций по цене $ 35. За это право А платит премию (цену опциона) в размере $ 200.

Если курс повышается и становится $ 40, то А покупает акции по $ 35 и имеет возможность продать их по $ 40. Тогда его чистая прибыль составит (40 – 35)*100 – 200 = $ 300 при затратах $ 200. Доходность операции составит 300 / 200 = 150%.

Если А не покупает опцион на покупку, а покупает акции по $ 30 в начале и продает по $ 40 через 3 мес., то прибыль равна (40 – 30) * 100, а доходность 1000/3000 = 33%.

Если курс акций падает, то А их не покупает и теряет $ 200.

Контракт на поставку в будущем (фьючерс, от англ. *futures*) — это обязательство продавца поставить к определенной дате определенное количество товара в определенное место по ценам, фиксируемым в момент заключения сделки. Под товаром могут пониматься реальный товар (зерно, мясо, нефть и т. д.) либо ценные бумаги, например, акции.

Вместе с тем фьючерс сам по себе является товаром на фондовом рынке вплоть до даты его исполнения. В отличие от опциона фьючерс — ценная бумага, которая дает право совершить определенную сделку, условия которой обязательны. В связи с этим опцион всегда дороже фьючерса.

Варрант (от англ. *warrant* — полномочие) — доверенность (свидетельство), выдаваемая складом владельцу товара. Состоит из двух частей — квитанции и собственно варранта. Относится к ценным бумагам, так как он может быть продан, передан, заложен. С передачей варранта новый владелец приобретает право на товар. Товаром могут быть и акции.

Поскольку цены контрактов, опционов, варрантов и т. д. зависят от цен фигурирующих в них товаров, то их называют *производными ценными бумагами*. Число этих бумаг постоянно растет.

Действующими лицами на фондовом рынке являются:

- эмитенты (от лат. *emittere* — выпускать), т. е. организации, выпускающие ценные бумаги (обычно это обладатели средств производства);
- инвесторы (от англ. *investment*), т. е. владельцы, вкладывающие капитал в ценные бумаги;
- посредники — брокерские конторы (от англ. *broker*), фондовые биржи, инвестиционные фонды, банки, осуществляющие продвижение ценных бумаг от эмитентов к инвесторам.

Саморегуляцию и устойчивость фондовому рынку обеспечивают:

- спекулянты, играющие на «времени», т. е. получающие прибыль от правильного прогноза цен на ценные бумаги;
- арбитражеры, играющие на разнице цен одновременно на нескольких биржах;
- хеджеры, заключающие сделки с гарантией, страхующие клиентов от возможного разорения.

Целью каждого участника фондового рынка является приумножение капитала.

В настоящее время выбор правильной стратегии вложения денег в условиях разнообразия возможностей практически невозможен без использования специальной науки — финансового анализа, элементы которого будут рассмотрены в данной работе.

Часть 2. Финансовые вычисления

Ценная бумага удостоверяет определенную финансовую операцию (сделку). Не конкретизируя вид ценной бумаги, изложим основные математические методы, позволяющие оценить выгодность и эффективность данной операции (сделки). В примерах и задачах будут приведены варианты расчетов эффективности для основных видов ценных бумаг.

Основные понятия

Пусть функция *S(t)* описывает зависимость капитала *S* от времени *t*. Простейшая финансовая сделка сводится к однократному предоставлению в долг некоторой суммы *S(t)* с условием возврата суммы *S(t+T)* через время T.

Для оценки эффективности операции используются две величины:

– относительное приращение суммы или капитала (интерес, *interest rate*, *return*)

$$r_T = \frac{S(t+T) - S(t)}{S(t)}, \qquad (2.1)$$

отсюда

$$S(t+T) = (1 + r_T)\ S(t); \qquad (2.2)$$

– относительная скидка или относительное уменьшение конечного капитала (дисконт, *discount rate*)

$$d_T = \frac{S(t+T) - S(t)}{S(t+T)}, \qquad (2.3)$$

отсюда

$$S(t)=(1-d_T)\ \ S(t+T),\qquad (2.4)$$

где

$S(t)$ — капитал в начальный момент t (начальный вклад);
$S(t+T)$ — капитал в конечный момент $t+T$ (конечная сумма).

Если время сделки T постоянно, то T называют базовым периодом, а r_T — часто называют процентной ставкой и d_T — дисконтом. Очевидно, процентная ставка и дисконт связаны соотношениями

$$r_T=\frac{d_T}{1-d_T};\quad d_T=\frac{r_T}{1+r_T}.\qquad (2.5)$$

Вместо дисконта иногда используют дисконт-фактор, равный

$$V_T=1-d_T.\qquad (2.6)$$

Очевидно

$$V_T=\frac{S(t)}{S(t+T)}=\frac{1}{1+r_T}.\qquad (2.7)$$

Рост и дисконт обычно выражают в процентах.

Пример 1. Ссуда в размере 2 млн руб. дана на 1 год с условием возврата 4 млн руб. В этом случае процентная ставка равна:

$$r_T=\frac{S(t+T)-S(t)}{S(t)}=\frac{4-2}{2}=1=100\%,$$

дисконт равен $d_T=\dfrac{S(t+T)-S(t)}{S(t+T)}=\dfrac{4-2}{4}=0{,}5=50\%$.

Пример 2. Кредит выдан на 5 млн руб. с кредитной ставкой 50% годовых. Тогда через год следует вернуть:

$$S(t+T)=(1+r_T)\cdot S(t)=(1+0{,}5)\cdot 5=7{,}5 \text{ млн руб.}$$

Пример 3. Кредит выдан с условием возврата через год 5 млн руб. и дисконтом 30%. Тогда дебитор получит:

$$S(t)=(1-d_T)\cdot S(t+T)=(1-0{,}3)\cdot 5=0{,}7\cdot 5=3{,}5 \text{ млн руб.}$$

При этом дисконт-фактор равен $V_T=1-d_T=0{,}7$.

Для удобства сравнения финансовых операций процентные ставки, дисконт приводят к базовому периоду — году (иногда полугодию, кварталу и т. д.). Отсюда возникает задача: имея относительный рост и дисконт за базовый период Т, вычислить соответствующие величины за фактический период времени.

Правила начисления процентов оговариваются при заключении сделки и сводятся к схемам простых процентов (*simple interest*), сложных процентов (*compound interest*) и смешанных процентов. Суть данных схем заключается в следующем.

Кредитование

Простые ставки процентов. Пусть начальный момент равен нулю, T — базовый период, t — фактический период действия сделки, называемый конверсионным периодом или периодом начисления, $S(o)$ — начальная сумма, $S(t)$ — конечная сумма, получаемая кредитором в момент t. Если годовой интерес (ставка) равна r_T, то в конце фактического срока сделки t дебитор должен заплатить кредитору сумму

$$S(t)=\left(1+r_T\frac{t}{T}\right)S(o), \qquad (2.8)$$

где t и T измеряются в днях. При этом согласно договору используется либо точная длительность года — 365 или 366 дней (точные проценты), либо приближенная длительность года — 360 дней = 12 месяцев ×30 дней (обычные проценты).

Пример 4. Выдан кредит на сумму 2 млн руб. с 15.01.2001 г. по 15.03. 2001 г. под 120% годовых. В зависимости от договора сумма погасительного платежа различна. При точном расчете t=17 дней (январь) + 28 дней (февраль) +15 дней (март) – 1 день = 59 дней согласно (2.8) имеем:

$$S(t)=\left(1+1{,}2\frac{59}{365}\right)\cdot 2=2{,}387945 \text{ млн руб.}$$

Приближенный расчет по обычным процентам дает согласно (2.8) t=60 дней:

$$S(t)=\left(1+1{,}2\frac{60}{360}\right)\cdot 2=2{,}4 \text{ млн руб.}$$

Сумма платежа по обычным процентам всегда больше чем по точным процентам.

Задача 1. Ссуда в размере 50 тыс. руб. выдана на полгода по простой ставке процентов 28% годовых. Определить наращенную сумму.

Ответ: 57 тыс. руб.

Задача 2. Кредит в размере 10 млн руб. выдан 2 марта до 11 декабря под 30% годовых, год високосный. Определить размер наращенной суммы для различных вариантов расчета процентов: точное число дней ссуды и точная длительность года 366 дней; точное число дней ссуды и приближенная длительность года 360 дней; приближенные число дней ссуды и длительность года.

Ответ: 12 327 868 руб.; 12 366 666 руб.; 12 333 333 руб.

Задача 3. Определить период начисления, за который первоначальный капитал в размере 25 млн руб. вырастет до 40 млн руб., если используется простая ставка процентов 28% годовых.

Ответ: t=2,14 года.

Задача 4. Определить простую ставку процентов, при которой первоначальный капитал в размере 24 млн руб. достигнет 30 млн руб. через год.

Ответ: r = 25%.

Задача 5. Кредит выдается под простую ставку 26% годовых на 250 дней. Рассчитать сумму, получаемую заемщиком, и сумму процентных денег, если требуется возвратить 40 млн руб.

Ответ: 33,955857 млн руб.; 6,044143 млн руб.

При расчетах по среднесрочным и долгосрочным кредитам используется схема сложных процентов.

Сложные проценты. Пусть длительность сделки t кратна базовому периоду T, т. е. $t = kT$. При базовом периоде $T = 1$ год, длительность сделки t — целое число лет k. Тогда наращенная сумма равна:

$$S(kT) = (1 + r_T)^k S(o), \tag{2.9}$$

где $S(o)$ — начальная сумма,

r_T — процентная ставка за год (интерес).

Очевидно, что зависимость суммы $S(t)$ от времени t при расчете по схеме простых процентов линейная, при расчете по схеме сложных процентов нелинейная (является показательной функцией от t), и, как будет показано ниже, в ряде случаев эта зависимость хорошо апроксимируется экспонентой.

Пример 5. Первоначальная вложенная сумма равна 200 тыс. руб. Определить наращенную сумму через пять лет при использовании простой и сложной ставки процентов в размере 28% годовых. Рассмотреть случаи, когда сложные проценты начисляются ежегодно, по полугодиям и поквартально. Для простых и процентных ставок имеем:

$$S(t) = \left(1 + \frac{t}{T} \cdot r_T\right) S(o) = (1 + 5 \cdot 0{,}28) \cdot 200 = 480 \text{ тыс. руб.}$$

Для сложных годовых процентов:

$$S(kT) = (1 + r_T)^k S(o) =$$

$$= (1 + 0{,}28)^5 \, 200 = 687{,}1947 \text{ тыс. руб.}$$

Для сложных полугодовых начисленных процентов:

$$S(kT) = \left(1 + \frac{r_T}{2}\right)^{2k} S(o) =$$

$$= (1 + 0{,}14)^{10} \, 200 = 741{,}44418 \text{ тыс. руб.}$$

Для поквартального начисления сложных процентов:

$$S(kT) = \left(1 + \frac{r_T}{4}\right)^{4k} S(o) =$$

$$= (1 + 0{,}07)^{20} \, 200 = 773{,}93666 \quad \text{тыс. руб.}$$

Обобщая пример 5, рассмотрим задачу вычисления процентной суммы $S(kT)$ через k лет. Сумма $S(o)$ выдана под r_T процентов годовых начислением сложных процентов m раз в год. Воспользовавшись формулой (2.9), для этого случая, очевидно, имеем:

$$S(kT)=\left(1+\frac{r_T}{m}\right)^{km}S(o). \qquad (2.10)$$

Представляет интерес рассмотрение предельного случая при $m\to\infty$, тогда сложные проценты начисляются непрерывно. Используя замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

где $e=2{,}71828\ \ldots$ — основание натуральных логарифмов (число «е»), получим:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r_T}{m}\right)^{km}=e^{kr_T}.$$

Таким образом, если сложные проценты начисляются непрерывно, наращенная сумма экспоненциально зависит от времени и равна:

$$S(kT)=e^{kr_T}S(o) \qquad (2.11)$$

Для примера 5 в случае непрерывного исчисления имеем:

$$S(kT)=e^{kr_T}S(o)=e^{5\cdot0{,}28}\cdot200=e^{1{,}4}\cdot200=811{,}039999 \text{ тыс. руб.}$$

Смешанные или комбинированные проценты. Пусть T — базовый период, а t — фактическая длительность сделки. Всякое число можно представить в виде целой и дробной части: $x=[x]+\{x\}$,

где

$[x]$ — обозначает целую часть числа;

$\{x\}=x-[x]$ — дробную часть числа.

Разобьем число $\frac{t}{T}$ на целую и дробную часть $\frac{t}{T}=\left[\frac{t}{T}\right]+\left\{\frac{t}{T}\right\}$.

Обозначим для простоты $\left[\frac{t}{T}\right]=k$ и $\left\{\frac{t}{T}\right\}=\tau$, тогда $\frac{t}{T}=k+\tau$.

Используя приведенные обозначения, для наращенной суммы, вычисленной по схеме комбинированных процентов, имеем:

$$S(t)=\left(1+r_T\right)^k\left(1+\tau\cdot r_T\right)S(o), \qquad (2.12)$$

где

k — целая часть $\frac{t}{T}$;

τ — дробная часть $\frac{t}{T}$.

Пример 6. Первоначальная сумма долга равна 50 млн руб. Определить наращенную сумму долга через 2,5 года, используя способ начисления смешанных процентов по ставке 25% годовых.

Для смешанных или комбинированных процентов имеем согласно формуле (2.12):

$$S(t)=\left(1+r_T\right)^k\left(1+\tau r_T\right)S(o)=$$

$$=(1+0,25)^2(1+0,5\cdot 0,25)50=87,890625 \text{ млн руб.}$$

Пример 7. 31 марта 1999 г. была получена в долг сумма 40 тыс. руб. под 32% годовых. Долг был возвращен 11 июня 2002 г. Какая сумма была возвращена?

При использовании в расчетах комбинированных процентов согласно (2.12) получается сумма:

$$S(t)=\left(1+r_T\right)^k\left(1+\tau r_T\right)S(o)=$$

$$=(1+0,32)^3\left(1+\frac{72}{365}\cdot 0,32\right)40=97,80598 \text{ тыс. руб.}$$

При расчете кредитования могут возникать различные задачи. Например, следующая.

Пример 8. За какой срок первоначальный капитал 50 млн руб. увеличится до 200 млн руб., если: а) на него начисляются сложные проценты по ставке 28% годовых; б) проценты начисляются ежеквартально?

Решение: Согласно (2.9) для случая «а» начальная и конечная суммы связаны соотношением $S(t)=(1+r_T)^k S(o)$.

Отсюда, находим k:

$$(1+r_T)^k = \frac{S(t)}{S(o)}$$

$$k=\frac{\ln\frac{S(t)}{S(o)}}{\ln(1+r_T)}.$$

Подставляя численные значения, имеем:

$$k=\frac{\ln\frac{200}{50}}{\ln(1+0,28)}=5,62 \text{ года.}$$

Аналогично, согласно (2.10) для случая «б» имеем уравнение для определения длительности сделки

$$S(t)=\left(1+\frac{r_T}{4}\right)^{4k} S(o).$$

Решая уравнение, имеем:

$$k=\frac{\ln\frac{S(t)}{S(o)}}{4\ln\left(1+\frac{r_T}{4}\right)}.$$

Из формулы видно, что при малых значениях r_T в силу замечательного предела $\ln(1+x)\sim x$ значение длительности сделки будут близки. В нашем случае r_T=0,28 и для значений имеется небольшое отличие:

$$k=\frac{\ln\frac{200}{50}}{4\ln\left(1+\frac{0,28}{4}\right)}=\frac{\ln 4}{4\ln(1,07)}=5,12 \text{ года.}$$

Дисконтирование

Вычисление дисконта или дисконт-фактора за произвольный период времени t также производится по ставке r_T или дисконту d_T за базовый период T (обычно год) по различным схемам: простых, сложных или комбинированных процентных ставок.

Простые ставки. Банковский дисконт (*bank rate*). Данная схема применяется в банковских расчетах при покупке или учете банковских краткосрочных обязательств (векселей).

$$S(o)=\left(1-d_T\frac{t}{T}\right)S(t), \qquad (2.13)$$

где d_T — базовый (обычно годовой) дисконт;
T — базовый (обычно годовой) период;
t — расчетное время действия сделки;
$S(t)$ — стоимость векселя в момент t;
$S(o)$ – стоимость покупки векселя в момент o.

Пример 9. Вексель выдан на сумму 2 млн руб. и содержит обязательство выплатить владельцу эту сумму 15.03.2001 г. Владелец предъявил банку вексель досрочно 01.02.2001 г., банк согласился выплатить сумму (учесть вексель), но с дисконтом 120% годовых. Полученная сумма будет равна:

$$S(o)=\left(1-d_T\frac{t}{T}\right)S(t)=\left(1-1{,}2\frac{42}{360}\right)2=1{,}72 \text{ млн руб.}$$

Формула простых процентов (2.13) может быть использована лишь при $d_T\frac{t}{T}<1$.

В частности, лишена смысла операция учета векселя за год с годичным дисконтом d_T более 100%.

Математический дисконт-фактор равный $V_T=\frac{1}{1+r_T}=1-d_T$ более универсален.

Действительно, при расчете дисконтирования по сложным процентам получаются из (2.6) и (2.9):

$$S(o)=\frac{S(t)}{(1+r_T)^k}=(1-d_T)^k S(t), \qquad (2.14)$$

где

$t=k \cdot T$ — длительность сделки кратная базовому периоду;

k — количество базовых периодов.

Пример 10. Определить современную (текущую, настоящую, приведенную) величину суммы 100 млн руб., выплачиваемую через три года при использовании ставки сложных процентов 24% годовых.

Воспользовавшись формулой (2.14), имеем:

$$S(o)=\frac{S(t)}{(1+r_T)^k}=\frac{100}{(1+0,24)^3}=52,449386 \text{ млн руб.}$$

Если, согласно контракту, применяется схема дисконтирования несколько раз в течение года, то оговаривается годовой дисконт (годовая учетная ставка) и число расчетов m в течение года. Тогда приведенная сумма равна:

$$S(o)=\left(1-\frac{d_T}{m}\right)^{k \cdot m} S(t). \qquad (2.15)$$

Пример 11. Вексель на 3 млн руб. с годовой учетной ставкой 10% с дисконтированием 4 раза в год выдан на 2 года. Тогда исходная сумма, которая должна быть выдана в долг под вексель согласно (2.15) равна:

$$S(o)=\left(1-\frac{0,1}{4}\right)^8 3=2,449955 \text{ млн руб.}$$

Эффективная ставка

Для сравнения различных вариантов сделок удобно использовать эффективную ставку r_ℓ.

Эффективной называют годичную ставку r_ℓ сложных процентов, обеспечивающую заданное отношение полученной суммы *S(t)* к выданной сумме *S(o)*, независимо от того, какая схема оплат используется в данной конкретной сделке.

Из (2.9) имеем уравнение для определения r_ℓ:

$$(1+r_\ell)^t = \frac{S(t)}{S(o)},$$

где t — длительность сделки в годах.

Тогда

$$r_\ell = \left(\frac{S(t)}{S(o)}\right)^{\frac{1}{t}} - 1. \qquad (2.16)$$

Очевидно, что эффективная ставка не зависит от конкретных сумм *S(o)* и *S(t)*, а определяется только отношениями этих сумм.

Пример 12. Найти эффективную ставку сделки, в результате которой первоначальный капитал утроился за 5 лет.

Согласно (2.16) имеем $r_\ell = \sqrt[5]{3} - 1 = 24{,}57\%$.

Пример 13. В долг дана сумма 2 млн руб. с условием возврата через 2,5 года 3 млн руб. Тогда эффективная ставка в данной сделке равна:

$$r_\ell = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2{,}5}} - 1 = 17{,}6\%.$$

Пример 14. Выдан кредит в 2 млн руб. на 3 месяца под 100% годовых. Найти эффективную ставку.

Учитывая, что кредит краткосрочный, сумма, выплачиваемая через 3 месяца, будет равна:

$$S(t) = S(o)\left(1+\frac{t}{T}\right) = 2\left(1+\frac{3}{12}\right) = 2{,}5 \text{ млн руб.}$$

Тогда эффективная ставка будет равна:

$$r_\ell = \left(\frac{S(t)}{S(o)}\right)^{\frac{1}{t}} - 1,$$

где $S(o)$=2 млн руб.,

$S(t)$=2,5 млн руб., $t = \frac{1}{4}$ года.

$$r_\ell = \left(\frac{2{,}5}{2{,}0}\right)^4 - 1 = 144{,}1\%.$$

Пример 15. Вексель 3 млн руб. выдан на 2 года с годовой учетной ставкой 10% с дисконтированием 2 раза в год. Найти эффективную ставку. По формуле (2.15) найдем исходную сумму, выплаченную по векселю:

$$S(o) = \left(1 - \frac{d_T}{m}\right)^{km} S(t) = \left(1 - \frac{0{,}1}{2}\right)^{2\cdot 2} S(t) = (0{,}95)^4 S(t).$$

Тогда $\frac{S(t)}{S(o)} = \frac{1}{(0{,}95)^4}$. Следовательно, для эффективной ставки имеем:

$$r_\ell = \left(\frac{S(t)}{S(o)}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{(0{,}95)^2} - 1 = 10{,}8\%.$$

Пример 16. Остров Манхеттен был продан в 1624 г. за \$ 24. В 1976 г. его стоимость была \$ $40\cdot 10^9$. Какова эффективная ставка сделки?

$$r_\ell = \left(\frac{S(t)}{S(o)}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 = \left(\frac{40\cdot 10^9}{24}\right)^{\frac{1}{352}} - 1 = 6{,}2\%.$$

Пример 17. Имеется вексель следующей формы:

«2000 руб. Санкт-Петербург. 1 сентября 2001 г. Обязуюсь уплатить через 60 дней после данной даты по распоряжению гражданина А 2000 руб. с процентной ставкой 11% годовых.

/подпись/ гражданин В».

За сколько банк купит вексель 1 октября 2001 г., если банковская процентная ставка 9,5%?

Решение: Сумма, которую должен получить гражданин А через 60 дней вычисляется по схеме простых процентов и равна $2000\left(1+0{,}11\frac{1}{6}\right)=2037$ руб.

Отсюда получается уравнение:

$$S(o)\left(1+0{,}095\frac{1}{12}\right)=2037 \text{ руб.},$$

где *S(o)* — сумма, которую уплатит банк за вексель. Окончательно *S(o)* = 2021 руб.

Непрерывная ставка (сила роста) и непрерывный дисконт

В теоретических исследованиях и на практике, когда платежи производятся многократно, удобно использовать непрерывный способ начисления процентов. Переход к пределу может быть осуществлен аналогично тому, как это делалось при выводе формулы (2.11) или следующим способом.

Сумма платежа S удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению:

$$\frac{dS}{dt}=aS\,, \qquad (2.17)$$

где

$\frac{dS}{dt}$ — скорость изменения платежа;

a — процент начисления или сила роста.

В другом виде уравнение запишется:

$$dS = aSdt,$$

т. е. приращение платежа пропорционально самому платежу S и промежутку времени dt. Коэффициент пропорциональности a суть сила роста или процент начисления.

Возможна еще одна запись дифференциального уравнения:

$$\frac{dS}{S} = adt,$$

т. е. относительное изменение суммы платежа пропорционально времени. Причем по-прежнему, а определяется процентами начисления и в общем случае может зависеть от времени.

Решение линейного дифференциального уравнения хорошо известно и записывается в виде:

$$S(t) = S(o)e^{\int_0^t a(t)dt}, \qquad (2.18)$$

где

$S(o)$ — начальная сумма;

$S(t)$ — сумма платежа в момент t.

Если сила роста постоянна на всем рассматриваемом промежутке, то для конечного платежа в момент t имеем:

$$S(t) = S(o)e^{at}. \qquad (2.19)$$

Очевидно, приведенные формулы при $a>0$ соответствуют расчету кредитования, а при $a<0$ — расчету дисконтирования.

Рассмотрим примеры использования данных формул.

Пример 18. Ссуда 200 тыс. руб. дана на 2,5 года под ставку 20% годовых с ежеквартальным начислением. Найти сумму конечного платежа.

Решение: Сумма конечного платежа удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{dS}{dt} = aS$, где $a = 0{,}2$ в соответствии с процентом ежегодного начисления и время t измеряется в годах. Решение линейного уравнения известно: $S(t) = S(o)e^{at}$.

Тогда сумма конечного платежа равна:

$$S(t)=200\cdot e^{at}=200\cdot e^{0,2\cdot 2,5}=200\cdot e^{0,5}=$$
$$=200\cdot 1{,}65=329{,}7 \text{ тыс. руб.}$$

Расчет для дискретного случая по формулам (2.10) дает:

$$S(t)=\left(1+\frac{0,2}{4}\right)^{10} S(o)=(1+0{,}05)^{10}\cdot 200=$$
$$=200\cdot 1{,}63=325{,}8 \text{ тыс. руб.}$$

Видно, что при многократных начислениях небольших процентов результаты расчетов сумм конечного платежа близки.

Рассмотрим теперь пример расчета дисконтирования в непрерывном случае.

Пример 19. Вексель на 3 млн руб. с годовой учетной ставкой 10% и дисконтированием 2 раза в год выдан на 2 года. Найти исходную сумму, которая должна быть выдана в долг под этот вексель.

Решение: Одолженная под вексель сумма платежа удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, решение которого известно:

$$S(o)=S(t)e^{-at}.$$

Тогда: $S(o)=3\cdot e^{-at}=3\cdot e^{-0,1\cdot 2}=3\cdot e^{-0,2}=$
$$=3\cdot 0{,}82=2{,}46 \text{ млн руб.}$$

Расчет одолженной под вексель суммы по дискретным формулам (2.14) и (2.15) дает близкие результаты:

$$S(o)=3\cdot\left(1-\frac{0,1}{2}\right)^4=3\cdot 0{,}81=2{,}44 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, теоретические и практические вычисления по непрерывным формулам дают результаты, близкие к результатам расчета по дискретным формулам, если количество начислений велико, а процент начисления невелик.

Часть 3. Потоки платежей

Однонаправленные потоки платежей

Финансовые контракты, в том числе контракты, оформленные в виде ценных рыночных бумаг, обычно предполагают не отдельные или единовременные платежи, а многократные выплаты в различные промежутки времени. В частности, получение кредита может быть распределено во времени. В общем случае взаимоотношения между кредитором и дебитором определяются потоком платежей.

Пусть T — базовый период, r — процентная ставка для базового периода. В качестве единицы измерения времени будем использовать базовый период T.

Пусть $t_1, t_2, \ldots t_n$ — моменты времени, в которые осуществляются выплаты сумм $c_1, c_2, \ldots c_n$ — соответственно.

Предполагается, что выполнено $0<t_1<t_2<\ldots<t_n<t$, где $0, t$ — начальный и конечный момент рассмотрения.

Поток платежей удобно представлять графически (см. рис. 3.1).

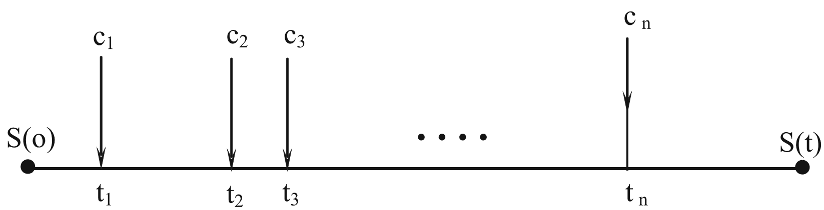

Рис. 3.1

Для оценки потока платежей удобно использовать две величины:

S(o) — современное значение, приведенный доход или приведенная к начальному моменту денежная сумма, PV (*present value*);

S(t) — будущее значение или наращенная сумма, *FV* (*future value*).

Смысл *S(o) (PV)* и *S(t) (FV)* очень прост:

S(o) (PV) — начальная сумма, вложив которую под те же проценты r, можно обеспечить к моменту t возможность выплаты из нее всех рентных платежей;

S(t) (FV) — наращенная сумма определяется путем приведения всех платежей с учетом роста к конечному моменту действия контракта (или к моменту последнего платежа).

Будем считать, что на все время контракта процентная ставка r постоянна. Рассчитаем S(o) – современное значение *(PV)* или сумму, полученную приведением к начальному моменту, всех платежей с учетом дисконтирования.

Удобно для расчета воспользоваться изображением (см. рис. 3.2).

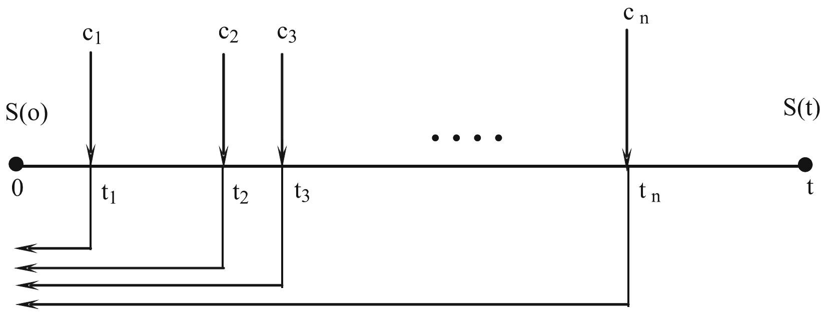

Рис. 3.2

Тогда:

$$S(o)=\frac{c_1}{(1+r)^{t_1}}+\frac{c_2}{(1+r)^{t_2}}+\cdots+\frac{c_n}{(1+r)^{t_n}} \qquad (3.1)$$

Наращенная сумма может быть вычислена двумя способами. Зная *S(o)*, можно найти *S(t)* по формуле:

$$S(t)=S(o)(1+r)^t \qquad (3.2)$$

С другой стороны, воспользовавшись схемой (см. рис. 3.3), получаем:

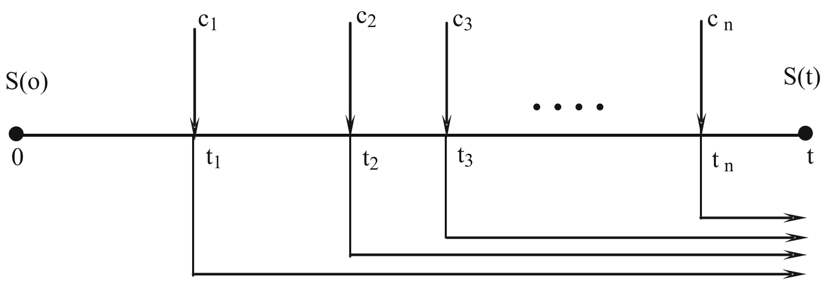

Рис. 3.3

$$S(t) = c_1(1+r)^{t-t_1} + c_2(1+r)^{t-t_2} + \cdots + c_n(1+r)^{t-t_n} \qquad (3.3)$$

Можно убедиться, что формулы (3.2) и (3.3) эквивалентны.

Пример 20. Контракт предусматривает следующий порядок использования кредитной линии: 01.07.2001 г. — 5 млн руб., 1.01.2002 г. — 15 млн руб., 01.01.2004 г. — 18 млн руб. Необходимо определить сумму задолженности на начало 2005 г. и современную стоимость этого потока на начало срока при условии, что проценты начисляются по ставке 20% годовых.

Решение: Сумма задолженности на начало 2005 г. будет равна:

$$S(3.5) = 5 \cdot 1{,}2^{3.5} + 15 \cdot 1{,}2^{3} + 18 \cdot 1{,}2 = 56{,}985 \text{ млн руб.}$$

Современная стоимость потока на момент выплаты первой суммы равна:

$$S(o) = 5 + 15 \cdot 1{,}2^{-0.5} + 18 \cdot 1{,}2^{-2.5} = 30{,}104 \text{ млн руб.}$$

Легко проверить, что $S(3.5)$ и $S(o)$ связаны формулой:

$$S(3.5) = (1+0{,}2)^{3.5} S(o).$$

Действительно $56{,}985 = 1.2^{3.5} \cdot 30{,}104$.

Финансовая рента (аннуитет)

Важным частным случаем потока платежей является **финансовая рента** или просто *рента* (*rent*), называемая иногда также *аннуитетом*.

Под *финансовой рентой* понимается поток платежей, у которого все выплаты одного знака и производятся через равные промежутки времени.

Интервал времени между выплатами называется ***периодом ренты*** (*rent period*, *payment period*); размер отдельного платежа — **членом ренты** (*rent*). **Сроком ренты** (*temp*) называется время от начала первого периода ренты до конца последнего периода.

Если выплаты производятся в конце периода, то рента называется *рента постнумерандо* или *аннуитет постнумерандо* (обыкновенный аннуитет).

Если выплаты производятся в начале периода, то рента называется *рента пренумерандо* (авансированная рента) или *аннуитет пренумерандо*.

Для *безусловной ренты* заранее оговариваются моменты всех выплат — от первой до последней выплаты.

Выплата *условной ренты* зависит от какого-либо случайного события. Примером такой ренты являются страховые выплаты. Для описания и оценки условных рент создана бурно развивающаяся в настоящее время страховая математика.

Простая рента означает выплаты одной суммы, *сложная рента* предполагает выплаты переменных сумм.

Проведем расчет простой ренты постнумерандо (см. рис. 3.4).

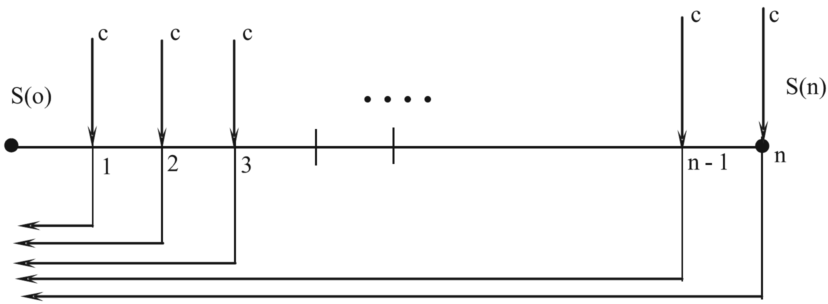

Рис. 3.4

Если член ренты — c, а процентная ставка — r, то современная стоимость ренты будет равна:

$$S(o)=\frac{c}{1+r}+\frac{c}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{c}{(1+r)^n} \qquad (3.4)$$

Суммируя геометрическую прогрессию, по формуле

$1+q+\cdots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$ получим:

$$S(o)=\frac{c}{1+r}\cdot\left[1+\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+r)^{n-1}}\right]=\frac{c}{1+r}\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\frac{1}{1+r}}=$$

$$=c\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{r}=c\frac{(1+r)^n-1}{r(1+r)^n}.$$

Окончательно,

$$S(o)=c\frac{(1+r)^n-1}{r(1+r)^n}\,. \qquad (3.5)$$

Наращенная сумма *S(n)* согласно (3.2) будет равна:

$$S(n)=c\frac{(1+r)^n-1}{r}\,. \qquad (3.6)$$

Расчет простой ренты пренумеранто сводится к следующему (см. рис. 3.5).

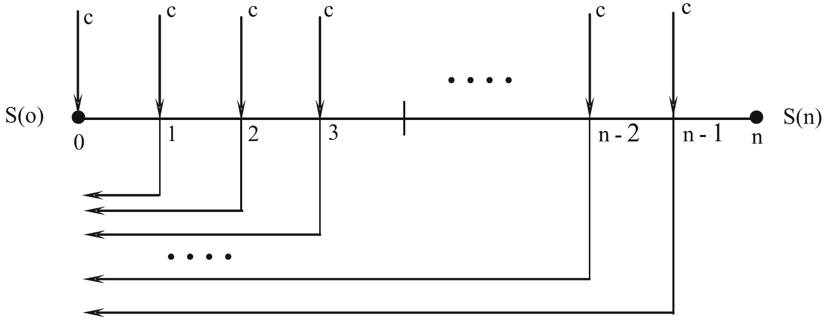

Рис. 3.5

Современная стоимость ренты равна:

$$S(o)=c+\frac{c}{1+r}+\cdots+\frac{c}{(1+r)^{n-1}}\,.$$

Суммируя геометрическую прогрессию аналогично предыдущему, получим:

$$S(o)=c\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{1-\frac{1}{1+r}}=c\quad(1+r)\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{r}\quad \text{или}$$

$$S(o) = c\frac{(1+r)^n - 1}{r\ \ (1+r)^{n-1}}\ . \qquad (3.7)$$

Для наращенной суммы получим:

$$S(n) = c\frac{(1+r)^n - 1}{r}(1+r)\ . \qquad (3.8)$$

Сравнивая (3.7) и (3.8) с (3.5) и (3.6), убеждаемся, что рента пренумерандо дороже ренты постнумерандо. Точнее справедлива формула:

$$S_{\text{пренумерандо}} = (1+r)S_{\text{постнумерандо}}$$

Для величины

$$a_{n,r} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}\ , \qquad (3.9)$$

называемой коэффициентом наращивания, существуют специальные таблицы. Однако в настоящее время его вычисление не составляет труда. Используя коэффициент наращивания, формулы (3.5) и (3.8) запишутся:

	постнумерандо	пренумерандо
$S(o)$	$c \cdot a_{n,r}\dfrac{1}{(1+r)^n}$	$c \cdot a_{n,r}\dfrac{1}{(1+r)^{n-1}}$
$S(n)$	$c \cdot a_{n,r}$	$c \cdot a_{n,r}(1+r)$

Когда процентная ставка r невелика, а длительность ренты большая, можно от дискретной ренты переходить к непрерывной ренте. В этом случае в формуле (3.4) величины $\dfrac{1}{(1+r)^k}$ следует заменить их непрерывными аналогами. Действительно, при малых r: $\dfrac{1}{(1+r)^k} \approx e^{-kr}$.

Тогда для непрерывной ренты постнумерандо имеем:

$$S(o) = ce^{-r} + ce^{-2r} + \cdots + ce^{-nr} = ce^{-r}\left(1 + e^{-r} + \cdots + e^{-(n-1)r}\right) =$$

$$= ce^{-r}\frac{1 - e^{-nr}}{1 - e^{-r}} = c\frac{1 - e^{-nr}}{e^{r} - 1}$$

Для малых r имеем $c^{r} - 1 = r$:

$$S(o) = c\frac{1 - e^{-nr}}{r}. \qquad (3.10)$$

Для непрерывной ренты постнумерандо наращенная сумма будет равна:

$$S(n) = c\frac{e^{nr} - 1}{r}. \qquad (3.11)$$

Аналогичные формулы могут быть получены и для непрерывных рент пронумерандо.

Рассмотрим примеры использования полученных формул.

Пример 21. Кредит 5 млн руб. погашается 12 равными ежемесячными взносами. Найти сумму выплат при ставке 12% годовых.

Решение: Воспользуемся формулой (3.4):

$$S(o) = \frac{c}{1 + r} + \frac{c}{(1 + r)^{2}} + \cdots + \frac{c}{(1 + r)^{12}},$$

где $S(o)$ = 5 млн; r = 0,01 — годовая ставка, пересчитанная на 1 месяц, т. е. $\frac{12\%}{12} = 1\%$.

Тогда, согласно (3.5), имеем:

$$S(o) = c\frac{(1 + r)^{12} - 1}{r(1 + r)^{12}}, \text{ отсюда: } c = \frac{r\ (1 + r)^{12}}{(1 + r)^{12} - 1}S(o).$$

Подставляя числа, получим:

$$c = \frac{0{,}01\ (1 + 0{,}01)^{12}}{(1 + 0{,}01)^{12} - 1} \cdot 5 = 0{,}4442 \text{ млн руб.}$$

Пример 22. Для приобретения недвижимости стоимостью 60 тыс. \$ берется кредит под 6% годовых. Согласно контракту погашение кредита происходит каждый месяц в течение 30 лет. Какова сумма месячного платежа?

Решение: Длительность ренты в месяцах равна 360. Воспользуемся формулой (3.4) для установления связи между неизвестным членом ренты с, современной стоимостью ренты $S(o)$ = 60 тыс. \$ и месячной процентной ставкой $r=\frac{6\%}{12}=0{,}5\%=0{,}005$.

$$S(o)=\frac{c}{1+r}+\frac{c}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{c}{(1+r)^{360}}$$, тогда,

суммируя, получим: $S(o)=c\frac{1-\frac{1}{(1+r)^{360}}}{r}$.

Отсюда, сумма месячного платежа равна:

$$c=\frac{S(o)\cdot r}{1-\frac{1}{(1+r)^{360}}}=60\cdot\frac{0{,}005}{1-\frac{1}{(1{,}005)^{360}}}=$$

$$=0{,}35973 \text{ тыс. } \$=359{,}73 \ \$.$$

Если воспользоваться формулами для непрерывной ренты (3.10), получим:

$$c=\frac{S(o)\cdot r}{1-e^{-nr}}=\frac{60\cdot 0{,}005}{1-e^{-360\cdot 0{,}005}}=0{,}35941 \text{ тыс. } \$=359{,}41 \ \$.$$

Очевидно, что суммы ежемесячного платежа, рассчитанные по непрерывным и дискретным формулам, близки.

Двусторонние потоки платежей. Эффективная ставка операции

В случае, когда финансовая операция предполагает последовательность перемежающихся поступлений денег и выплат, ее удобно описывать двусторонним потоком платежей.

Удобно поток платежей представить в виде графической схемы (см. рис. 3.6.).

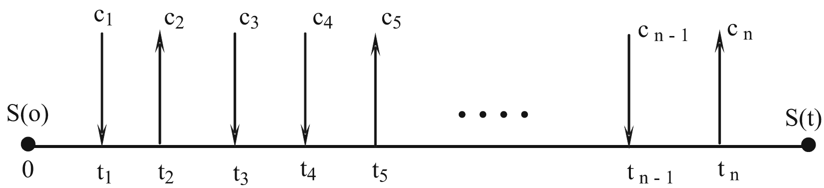

Рис. 3.6

При этом поступлениям денег в моменты $t_1, t_3, t_4, \ldots t_{n-1}$ соответствуют положительные величины $c_1, c_3, c_4, \ldots c_{n-1}$, а выплатам в моменты $t_2, t_5, \ldots t_n$ соответствуют отрицательные величины $c_2, c_5, \ldots c_n$.

Для оценки финансовой сделки, описываемой двусторонним потоком платежей, удобно использовать:

S(o) — чистое современное значение или чистый приведенный доход, *NPV (netto PV)* — чистое *PV*;

S(t) — чистое будущее значение или чистая наращенная сумма, *NFV (netto FV)* — чистое *FV*.

Если чистый приведенный доход *S(o) (NPV)* больше нуля, *S(o)*>0 (*NPV*>0), то сделка выгодна. В противном случае сделка невыгодна.

Расчет чистого приведенного дохода *S(o)* и чистой наращенной суммы *S(t)* возможен по формулам (3.1)–(3.3) с учетом знаков величин c_k.

Пример 23. Контракт между фирмой и банком предусматривает, что банк предоставляет в течение 3 лет кредит фирме ежегодными платежами в размере 1 млн $ в начале каждого года под ставку 10% годовых. Фирма возвращает долг, выплачивая 1,2 и 1 млн $ последовательно в конце 3, 4-го и 5-го года.

Найти *S(o)* чистый приведенный доход (*NPN*) для банка.

Представим исходные данные в виде схемы:

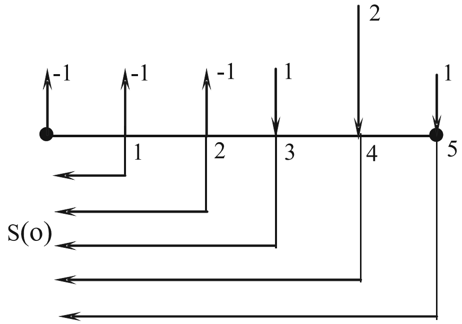

Рис. 3.7

Тогда:

$$S(o) = -1 - \frac{1}{1+0,1} - \frac{1}{(1+0,1)^2} + \frac{1}{(1+0,1)^3} +$$

$$+\frac{2}{(1+0,1)^4} + \frac{1}{(1+0,1)^5} = 0,003 \text{ млн \$}.$$

В связи с тем, что $S(o)>0$ (или $NVN>0$) сделка для банка является приемлемой.

Пример 24. Ссуда в 10 млн руб. выдана под 12% годовых (т. е. 1% месячных) и требует ежемесячной оплаты по 130 тыс. руб. и выплаты остатка долга к концу срока в 10 лет. Каков остаток долга Д?

Решение: В этой задаче месячная ставка $r = 1\%$ считается эффективной ставкой. Следовательно, *NPV* чистый приведенный доход *NPV* равен нулю.

$$-10 \cdot 10^6 + 130 \cdot 10^3 \frac{1-1,01^{-120}}{0,01} + Д \cdot 1,01^{-120} = 0,$$

отсюда $Д = 3,09884$ млн руб.

Для оценки эффективности сделки, заданной двусторонним потоком платежей, можно использовать понятие **эффективной ставки операции** (внутренней эффективности).

Под *эффективной ставкой* финансовой операции понимается значение ставки процента r, при котором *S(o)* чистое приведенное современное значение (*NPV*) равно нулю.

Таким образом, из (3.1) эффективная ставка является решением уравнения:

$$\frac{c_1}{(1+r)^{t_1}} + \frac{c_2}{(1+r)^{t_2}} + \cdots + \frac{c_n}{(1+r)^{t_n}} = 0 \qquad (3.12)$$

где c_1, c_2, ..., c_n – известные величины платежей со знаками плюс или минус, производимых в моменты t_1, t_2,..., t_n.

В общем случае уравнение (3.12) аналитически решить невозможно. Однако в этом случае могут быть использованы хорошо разработанные численные методы, например, метод Ньютона. Эти методы реализованы, например, в «Пакете анализа» в Excel. Название функции, вычисляющей чистый внутренний доход (эффективную ставку) ЧИСТВНДОХ().

Понятие эффективной ставки операции естественно обобщает введенное ранее в п. 2.4 понятие эффективной ставки.

Пример 25. Сравнить эффективность трех сделок:

1. В начале первого года банк дает фирме кредит в размере 3 млн руб. В конце второго года фирма возвращает 3,5 млн руб.
2. Банк дает фирме кредит в два этапа: в начале первого года — 2 млн руб., в начале второго года — 1 млн руб. В конце второго года фирма возвращает 3,5 млн руб.
3. Банк дает фирме кредит в два этапа: в начале первого года — 1 млн руб., в начале второго года — 2 млн руб. В конце второго года фирма возвращает 3,5 млн руб.

Решение: Найдем эффективные ставки для всех трех сделок и сравним их.

Схемы двусторонних потоков для сделок приведены на рисунке.

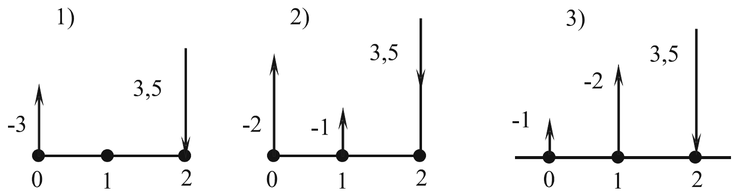

Рис. 3.8

Приравнивая к нулю приведенное современное значение *NPV*, получим уравнение для определения эффективной ставки *r*.

1-я сделка:

$$-3+\frac{3{,}5}{(1+r)^2}=0 \text{, отсюда } r=\left(\frac{3{,}5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}-1=8{,}01\% .$$

2-я сделка:

$$-2-\frac{1}{1+r}+\frac{3{,}5}{(1+r)^2}=0 .$$

Вводя обозначения $x=\frac{1}{1+r}$, получим квадратное уравнение: $3{,}5x^2-x-2=0$.

Решая его, получим: $x=\frac{1+\sqrt{29}}{7}=0{,}9122$.

Тогда $r=\frac{1}{x}-1=9{,}63\%$.

3-я сделка:

$$-1-\frac{2}{1+r}+\frac{3{,}5}{(1+r)^2}=0 .$$

Аналогично предыдущему, получаем уравнение для $x=\frac{1}{1+r}$.

$$3{,}5x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Отсюда $x = \frac{2 + 2\cdot\sqrt{4{,}5}}{7} = 0{,}8918$.

Тогда эффективная ставка сделки равна r = 12,13%. Очевидно, что третья сделка существенно выгоднее остальных сделок.

В приведенном выше примере расчет эффективной ставки сводился к решению квадратного уравнения. В общем случае вычисление эффективной ставки r сводится к решению уравнения (3.12). Если не существует положительного решения для r, то поток платежей не выгоден. В противном случае степень выгодности потока платежей оценивается значением эффективной ставки $r \geq 0$.

Приведенные в данном разделе методы расчета универсальны и могут быть использованы как для финансовых вычислений по ценным бумагам, так и для финансового анализа производственных инвестиций.

Финансовые вычисления по ценным бумагам

Оценка облигаций с нулевым купоном

Обладатель облигации с нулевым купоном процентный платеж не получает. Его доход составляет разница между эмиссионным курсом облигации и номинальной ценой.

Пусть $S(o)$ — текущая стоимость облигации (PV), F — номинальная стоимость облигации. Через n лет произойдет погашение облигации со ставкой дисконта r. Тогда

$$S(o) = \frac{F}{(1+r)^n}.$$

Пример 26. Оценить текущую стоимость облигации с нулевым купоном номинальной стоимостью 1000 руб. и сроком погашения через 3 года. Ставка дисконта r = 13%.

Решение: $S(o) = \frac{1000}{(1+0{,}13)^3} = 693{,}05$ руб.

Оценка облигации с фиксированной ставкой

Пусть r — ставка дисконта, r_k — купонная процентная ставка. Обладатель облигации каждый год до момента погашения облигации через n лет получает процентный платеж от номинальной стоимости F, равный $r_k \cdot F$.

Тогда, текущая стоимость облигации равна:

$$S(o) = \frac{F \cdot r_k}{1+r} + \frac{F \cdot r_k}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{F \cdot r_k}{(1+r)^{n-1}} + \frac{F + F \cdot r_k}{(1+r)^n} =$$

$$= F \cdot r_k \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1+r)^i} + \frac{F(1+r_k)}{(1+r)^n} = F\left(r_k \frac{1-(1+r)^{-(n-1)}}{r} + (1+r_k)(1+r)^{-n} \right)$$

Пример 27. Оценить текущую стоимость облигации (PV) по номинальной стоимости 1 млн руб. с купонной ставкой r_k = 16%, дисконтом r = 10%. Срок погашения 5 лет.

Решение:

$$S(o) = 1 \cdot 0{,}16 \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-4}}{0{,}1} + 1 \cdot (1+0{,}16)(1+0{,}1)^{-5} =$$

$$= 0{,}16 \cdot 3{,}169865 + 1{,}16 \cdot 0{,}620921 =$$

$$= 0{,}507178 + 0{,}720269 = 1{,}227447 \text{ млн руб.}$$

Оценка бессрочных облигаций с постоянным доходом

Для бессрочных купонных облигаций ежегодно выплачивается доход с и срок погашения отсутствует. Тогда текущая стоимость облигаций равна

$$S(o) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c}{(1+r)^i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+r} \frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{1-\frac{1}{1+r}} = \frac{c}{r}.$$

Пример 28. Оценить текущую стоимость бессрочной облигации, если по ней ежегодно выплачивается доход 10 тыс. руб. Ставка дисконта $r = 9\%$.

Решение:

$$S(o)=\frac{c}{r}=\frac{10}{0{,}09}=111{,}111 \text{ тыс. руб.}$$

Оценка обыкновенных акций

Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ — величина дивиденда, выплачиваемая за 1, 2, ..., n, ... период и r — ставка дисконта. Тогда курсовая цена акции равна ее текущему значению.

$$S(o)=\frac{D_1}{1+r}+\frac{D_2}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{D_n}{(1+r)^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} D_n(1+r)^{-n}.$$

Если дивиденды, выплачиваемые на одну акцию, постоянны и равны D, то стоимость акции равна:

$$S(o)=D\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^n}=\frac{D}{r}.$$

Пример 29. Оценить текущую стоимость акции, если каждый год дивиденд равен 100 тыс. руб. Ставка дисконта $r = 10\%$.

Решение:

$$S(o)=\frac{100}{0{,}1}=1000 \text{ тыс. руб.}$$

Оценим акции с равномерно возрастающими дивидендами. Пусть q — ставка, определяющая постоянный темп роста дивидендов и D — начальное значение дивиденда. Тогда, полученные дивиденды для 1, 2, ..., n,... года равны соответственно

$$D\ (1+q),\ D\ (1+q)^2,\cdots,\ D\ (1+q)^n,\cdots.$$

Учитывая ставку дисконта r ($r>q$) для текущей стоимости акции, получим формулу:

$$S(o)=\frac{D(1+q)}{1+r}+\frac{D(1+q)^2}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{D(1+q)^n}{(1+r)^n}+\cdots=$$

$$=D\frac{1+q}{1+r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+q}{1+r}\right)^n=D\frac{1+q}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1+q}{1+r}}$$

Окончательно получаем формулу Гордона: $S(o)=D\frac{1+q}{r-q}$.

Пример 30. Компания начальный дивиденд D=50 тыс. руб. ежегодно наращивает с темпом роста q=5%. Найти текущую стоимость акций компании при ставке дисконта r = 10%.

Решение:

$$S(o)=D\cdot\frac{1+q}{r-q}=50\cdot\frac{1+0{,}05}{0{,}1-0{,}05}=1050 \text{ тыс. руб.}$$

Часть 4. Моделирование рисков на рынке ценных бумаг

Финансовый риск

Профессия финансиста столь же рискованна, как и профессия подводника, летчика или космонавта. Всякая финансовая операция связана с возможным либо обогащением, либо разорением. Введем понятие финансового риска и построим его количественные характеристики.

Финансовая операция (сделка) называется **рискованной**, если ее эффективность недетерминирована, т. е. не известна в момент заключения сделки.

В этом случае эффективность финансовой сделки является случайной величиной и зависит от случайных обстоятельств.

Другими словами *рискованную финансовую сделку* нельзя характеризовать каким-либо одним значением эффективности.

Рискованной сделке соответствует целый ансамбль возможных значений эффективности, реализующихся с той или иной степенью вероятности.

Если удается получить некоторые вероятностные характеристики эффективности сделки, то может быть поставлена задача ограничения или минимизации риска при заданном уровне доходности сделки.

Практически любая финансовая сделка является рискованной, лишь некоторые финансовые операции с некоторой степенью условности можно считать безрисковыми. Например, государственные процентные бумаги экономически высокоразвитых стран.

Построим некоторые количественные характеристики риска. Чтобы разговор не был слишком абстрактным, рассмотрим финансовые операции с акциями, эффективность которых может характеризоваться величиной:

$$R = \frac{C_1 - C_0 + d}{C_0}, \qquad (4.1)$$

где

C_0 — цена покупки акции в момент 0;

C_1 — цена продажи в момент 1;

d – дивиденды, полученные за время от начального момента 0 до конечного момента 1.

Заметим, что аналогичный критерий эффективности может быть построен для других ценных бумаг, например, для облигаций. Тогда, C_0 — цена покупки облигации, C_1 — цена продажи облигации, d — доход от купонов.

Эффективность R, как уже отмечалось выше, является случайной величиной. Будем считать, что известны некоторые вероятностные характеристики (например, из анализа прошлого), позволяющие построить математическое ожидание m эффективности:

$$m = E(R), \qquad (4.2)$$

где E( ) обозначает математическое ожидание, т. е. осреднение по всему ансамблю возможных значений.

Степень отклонения случайной эффективности R от ее математического ожидания m характеризуется дисперсией (вариацией), равной:

$$V=\sigma^2=E\left(\left(R-m\right)^2\right), \tag{4.3}$$

где

$V=\sigma^2$ — вариация или дисперсия;

$\sigma=\sqrt{V}$ — среднеквадратическое отклонение.

Дисперсия или вариация всегда больше нуля. Величина дисперсии (вариации) является количественной оценкой степени рискованности сделки, чем больше дисперсия, тем более рискованной является финансовая сделка. В предельном случае для безрисковых операций дисперсия равна нулю.

Неравенство Чебышева

Для оценки рискованности операции и выбора средств для ограничения риска может быть полезна теорема Чебышева для случайных величин. В простейшем случае она связывает меру отклонения случайной величины R от ее математического ожидания m с ее дисперсией σ^2. Точнее она формулируется так.

Теорема Чебышева

Вероятность того, что случайная величина R отклонится от своего математического ожидания m больше, чем заданное значение δ, не превосходит ее дисперсии σ^2, деленной на δ^2, т. е.

$$P\left(\left|R-m\right|>\delta\right)\le\frac{\sigma^2}{\delta^2}, \tag{4.4}$$

где P(*) обозначает вероятность события.

Воспользуемся теоремой Чебышева для решения следующей задачи.

Пример 31. Господин А делает заем под процент r и под залог недвижимости. На полученные взаймы деньги господин А покупает акции. Какова вероятность того, что господин А не сможет вернуть долг и лишится недвижимости?

Решение: Будем считать, что эффективность R покупаемых господином А акций характеризуется ожиданием m и дисперсией σ^2. Отметим, что сделка имеет смысл, если $m>r$. Однако вероятность разорения все равно остается. Событие, которое приводит к разорению инвестора, состоит в следующем:

$$R<r, \tag{4.5}$$

т. е. эффективность вложения в акции R меньше r процентной ставки займа. Здесь R — случайная величина, а r – детерминированная величина. Из (4.5) следует $-(R-m)>m-r$. Тогда, для вероятности имеем: $P(R<r)=P(-(R-m)>m-r)\le P(|R-m|>m-r)$.

Далее воспользуемся неравенством Чебышева (4.4):

$$P(|R-m|>m-r)\le\frac{\sigma^2}{(m-r)^2}.$$

Окончательно, для вероятности разорения инвестора имеем неравенство:

$$P(R<r)\le\frac{\sigma^2}{(m-r)^2}.$$

Таким образом, вероятность разориться не превосходит величины $\frac{\sigma^2}{(m-r)^2}$. Если инвестор хочет, чтобы шанс разориться не превышал $\frac{1}{9}$, то достаточно выполнения условия: $\sigma^2\le\frac{1}{9}(m-r)^2$ или $m\ge r+3\sigma$, т. е. ожидаемая эффективность вложения в акции должна быть больше процентной ставки займа плюс три среднеквадратических отклонения 3σ. При этом вероятность разорения будет менее $\frac{1}{9}$.

Хеджирование

Хеджирование (*hedging*) — любая схема, позволяющая исключить или ограничить риск финансовых операций, связанных с ценными бумагами.

Для иллюстрации хеджирования рассмотрим следующий модельный пример.

Инвестор-кредитор А собирается вложить сумму C в дело под r процентов. Ожидаемый доход равен $R = Cr$. Однако операция инвестору представляется рискованной, и он решает приобрести страховой полис, гарантирующий выплату определенной суммы в случае провала сделки.

Для этого сумму C инвестор разделяет на две части: Cx он вкладывает в сделку и, $C(1-x)$ он тратит на страховку, где x, $1-x$ — доля суммы, потраченная на финансовую сделку и страховой полис соответственно. Возможны два варианта развития событий.

Вариант 1. Сделка оказалась удачной. В результате получен доход $R_1 = C(1+r)x - C$.

Вариант 2. Сделка не удалась. Инвестор получает страховую выплату в размере $C(1-x)q$, где q — отношение страхового возмещения к цене полиса. Тогда полученный доход равен: $R_2 = C(1-x)q - C$.

Очевидно, логично выбрать x так, чтобы доход в обоих случаях был одинаков $R_1 = R_2$. Решив линейное уравнение, получим:

$$x = \frac{q}{1+r+q}.$$

При этом доход будет равен:

$$R = R_1 = R_2 = \left(\frac{(1+r)q}{1+r+q} - 1\right)C.$$

Таким образом, данная схема хеджирования исключает неопределенность, при этом эффективность сделки снижается с r до $\frac{(1+r)q}{1+r+q} - 1$.

Рассмотрим численный пример. Пусть $r = 0{,}2$, а $q = 50$. Тогда доля средств, отпускаемых на сделку, будет равна:

$$x = \frac{q}{1+r+q} = \frac{50}{1+0{,}2+50} = \frac{50}{51{,}2} = 0{,}98 .$$

Доля средств на страховку будет равна $1-x = 0{,}02$. Эффективность уменьшается с $r = 20\%$ до $\frac{R}{C} = \frac{(1+r)q}{1+r+q} - 1 = \frac{1{,}2 \cdot 50}{51{,}2} - 1 = 0{,}17 = 17\%$.

Таким образом, за счет небольшого уменьшения эффективности с 20% до 17% удастся уменьшить финансовый риск сделки.

Часть 5. Портфель ценных бумаг

Характеристики портфеля ценных бумаг

Для уменьшения риска инвестор покупает на рынке не одну высокодоходную, но ненадежную ценную бумагу, а несколько ценных бумаг различного типа.

При этом инвестор следует пословице: «Никогда не клади все яйца в одну корзину». Дадим теоретическое обоснование данного принципа.

Все последующие рассуждения справедливы для стационарно развивающейся экономики, либо для промежутков времени ее стационарного развития. В нестационарном случае, например, в случае катастрофического кризисного развития экономики данные ниже математические модели не применимы.

Портфелем ценных бумаг инвестора называется совокупность некоторого количества ценных бумаг различного типа — векселей, акций нескольких корпораций, контрактов, опционов и т. д.

Предположение о стационарности позволяет описывать рынок ценных бумаг случайными величинами. В частности, значение эффективности R_i операции с i-й ценной бумагой можно считать случайной величиной.

Пусть портфель инвестора содержит n ценных бумаг с эффективностями $R_1, R_2, ..., R_n$. Предположим, что известны некоторые характеристики эффективностей:

1. Математическое ожидание случайной величины R_i, т. е. средняя ожидаемая эффективность i-й бумаги.
$$m_i = E(R_i)$$
2. Дисперсия (вариация) случайной величины R_i, оценивающая степень отклонения случайной величины R_i от ее математического ожидания:
$$\upsilon_{ii} = \sigma_i^2 = E\left(\left(R_i - m_i\right)^2\right).$$
Дисперсия оценивает надежность ценной бумаги и является мерой финансового риска покупки i-й ценной бумаги.
Среднеквадратическое (стандартное) отклонение σ^2 имеет ту же размерность, что и m_i и R_i и равно:
$$\sigma_i = \sqrt{\upsilon_{ii}} = \sqrt{E\left(\left(R_i - m_i\right)^2\right)}.$$
3. Ковариация двух случайных величин R_i и R_j равна:
$$\upsilon_{ij} = E\left(\left(R_i - m_i\right)\left(R_j - m_j\right)\right).$$
Она определяет связь между случайными величинами R_i и R_j, т. е. дает количественную оценку связи эффективности i-й и j-й ценной бумаги.
Коэффициент корреляции k_{ij} случайных величин R_i и R_j выражается через ковариацию следующим образом:
$$k_{ij} = \frac{\upsilon_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad \text{или} \quad k_{ij} = \frac{E\left(\left(R_i - m_i\right)\left(R_j - m_j\right)\right)}{\sqrt{E\left(\left(R_i - m_i\right)^2\right)} \cdot \sqrt{E\left(\left(R_j - m_j\right)^2\right)}}.$$
Коэффициент корреляции изменяется в пределах от –1 до 1:
$$-1 \le k_{ij} \le 1.$$
При $k_{ij} = 0$ статистической связи между эффективностями i-й и j-й ценной бумагой нет.

При $k_{ij} = 1$ эффективности i-й и j-й ценной бумаги коррелированы. Величина R_j линейно зависит от R_i, точнее $R_j = \beta R_i + \alpha$, где α, β — некоторые числа, причем $\beta > 0$.

В этом случае R_i и R_j изменяются синхронно: росту R_i соответствует рост R_j, уменьшению R_i соответствует уменьшение R_j.

При $k_{ij} = -1$ эффективности R_i и R_j антикоррелированы. Они линейно связаны, т. е. $R_j = -\beta R_i + \alpha$, где α, β — некоторые числа, причем $\beta > 0$.

Обратим внимание на то, что при корреляции коэффициент при R_i в линейной связи положителен, а при антикорреляции этот коэффициент отрицателен.

Тогда R_i и R_j изменяются асинхронно или находятся в противофазе, т. е. увеличению R_i соответствует уменьшение R_j и, наоборот, уменьшению R_i соответствует увеличение R_j.

Описанных исходных данных достаточно для оценки рискованности портфеля.

Всякой ценной бумаге может быть поставлена в соответствие пара чисел (σ, m), где σ оценивает риск, m — эффективность ценной бумаги.

Удобно рассматривать пары чисел (σ_i, m_i), соответствующие различным ценным бумагам, как точки на плоскости «риск–эффективность» (см. рис. 5.1).

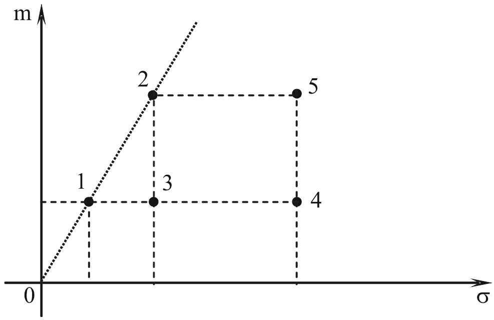

Рис. 5.1

Сравнивая ценные бумаги 1, 3, 4, очевидно следует выбрать бумагу 1, так как для нее при одной и той же эффективности риск меньше. Сравнивая 2 и 3 (или 4 и 5), очевидно следует выбрать 2 (или 5), так как при одном и том же риске эффективность больше.

Без дополнительной информации невозможно сделать выбор только между 1 и 2 лежащими на одной прямой, проходящей через начало координат. Действительно, в этом случае увеличение риска приводит к пропорциональному увеличению эффективности.

Оценка риска портфеля ценных бумаг

Предположим, что портфель инвестора содержит n ценных бумаг с эффективностями R_1, R_2, ..., R_n. На приобретение ценных бумаг истрачена сумма, которую удобно принять за единицу. Пусть x_1, x_2, ..., x_n — суммы, потраченные на приобретение 1, 2, ..., n-й бумаги. Тогда:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n = 1 \text{ или } \sum_{k=1}^{n} x_k = 1. \tag{5.1}$$

Эффективность портфеля будет равна:

$$R = x_1R_1 + x_2R_2 + \cdots + x_nR_n \text{ или } R = \sum_{k=1}^{n} x_kR_k. \tag{5.2}$$

Используя свойства линейности математического ожидания, для ожидаемой (средней) эффективности m получим:

$$m = E(R) = E\left(\sum_{k=1}^{n} x_kR_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_kE(R_k) = \sum_{k=1}^{n} x_km_k,$$

или окончательно:

$$m = \sum_{k=1}^{n} x_km_k = x_1m_1 + x_2m_2 + \cdots + x_nm_n. \tag{5.3}$$

Отклонение эффективности портфеля R от ожидаемой эффективности равно:

$$R - m = \sum_{k=1}^{n} x_k\left(R_k - m_k\right).$$

Математическое ожидание квадрата отклонения $(R-m)^2$ является дисперсией (вариацией). Оно определяет меру риска для портфеля и равно в силу линейности математического ожидания величине:

$$V = E\left(\left(R-m\right)^2\right) = E\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\left(R_k - m_k\right)\cdot\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell\left(R_\ell - m_\ell\right)\right) =$$

$$= E\left(\sum_{k,\ \ell=1}^{n} x_k x_\ell\left(R_k - m_k\right)\left(R_\ell - m_\ell\right)\right) =$$

$$= \sum_{k,\ \ell=1}^{n} x_k x_\ell E\left(\left(R_k - m_k\right)\left(R_\ell - m_\ell\right)\right).$$

Окончательно: $V = \sigma^2 = \sum_{i,\ j=1}^{n} x_i x_j \upsilon_{ij}$, (5.4)

где $\upsilon_{ij} = E\left(\left(R_i - m_i\right)\left(R_j - m_j\right)\right)$ — ковариация случайных величин R_i и R_j.

Она связана с коэффициентами корреляции k_{ij} случайных величин R_i и R_j формулой:

$$\upsilon_{ij} = \sigma_i \sigma_j k_{ij}\,, \tag{5.5}$$

где

$\sigma_i^2 = \upsilon_{ii} = E\left(\left(R_i - m_i\right)^2\right)$ — дисперсия R_i;

$\sigma_j^2 = \upsilon_{jj} = E\left(\left(R_j - m_j\right)^2\right)$ — дисперсия R_j.

Таким образом, риск портфеля инвестора определяется дисперсией, являющейся квадратичной формулой относительно $x_1, x_2, ..., x_n$ и заданной симметричной матрицей:

$$\left\{\upsilon_{ij}\right\} = \begin{pmatrix} \upsilon_{11} & \upsilon_{12} & \upsilon_{13} & \cdots & \upsilon_{1n} \\ \upsilon_{21} & \upsilon_{22} & \upsilon_{23} & \cdots & \upsilon_{2n} \\ \upsilon_{31} & \upsilon_{32} & \upsilon_{33} & \cdots & \upsilon_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \upsilon_{n1} & \upsilon_{n2} & \upsilon_{n3} & \cdots & \upsilon_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

где $\upsilon_{ij} = \upsilon_{ji}, \quad \upsilon_{ii} = \sigma_i^2$.

В развернутом виде (5.4) запишется:

$$V = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \cdots + \sigma_n^2 x_n^2 + 2\left(\upsilon_{12} x_1 x_2 + \upsilon_{13} x_1 x_3 + \cdots + \upsilon_{n-1,\,n} x_{n-1} x_n\right)$$

Выпишем основные уравнения, характеризующие портфель:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 & \text{— уравнение баланса сумма всех инвестиций равна 1;} \\ m = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i m_i & \text{— ожидаемая эффективность портфеля;} \\ V = \sigma^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i x_j \upsilon_{ij} & \text{— дисперсия портфеля, оценивающая меру риска портфеля.} \end{cases}$$

Далее рассмотрим частные случаи.

Портфель из независимых ценных бумаг. Диверсификация портфеля

Предположим, что портфель инвестора состоит из попарно некоррелированных ценных бумаг. Тогда ковариация $\upsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Используя уже введенное ранее обозначение $\upsilon_{ii} = \sigma_i^2$, получим для дисперсии (5.4) или (5.7):

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \cdots + \sigma_n^2 x_n^2 . \qquad (5.9)$$

Предположим, что инвестор вложил свои деньги равными порциями во все ценные бумаги. Тогда $x_i = \dfrac{1}{n}$ и из (5.9) получаем для ожидаемого эффекта:

$$m = \frac{1}{n}\left(m_1 + m_2 + \cdots + m_n\right), \qquad (5.10)$$

для риска:

$$V = \frac{1}{n^2}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2\right). \qquad (5.11)$$

Пусть σ_m^2 равна максимальной дисперсии из $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$. Тогда, для меры риска может быть получена оценка

$$V = \frac{1}{n^2}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2\right) \le \frac{1}{n^2} n\sigma_m^2 \le \frac{\sigma_m^2}{n}.$$

Очевидно, при росте числа независимых ценных бумаг, включенных в портфель, риск портфеля стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} V = 0$.

Этот результат в теории финансового рынка известен как эффект **диверсификации** портфеля.

Портфель из коррелированных ценных бумаг

В отличие от предыдущего пункта предположим, что эффективности ценных бумаг попарно коррелированны, т. е. для i и j бумаги ($i \ne j$) коэффициент корреляции равен 1. Тогда, $k_{ij} = 1$ ($i \ne j$), из (5.5) $\upsilon_{ij} = \sigma_i \cdot \sigma_j$ и риск из (5.4) равен

$$V = \sum_{i,\ j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i\right)^2.$$

Произведем простую диверсификацию, вложив деньги в равных долях $x_i = \frac{1}{n}$, тогда:

$$V = \sigma^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i\right)^2.$$

Для среднеквадратического отклонения, оценивающего риск, получаем:

$$\sigma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i = \frac{1}{n}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n\right). \qquad (5.12)$$

Отсюда, риск будет меняться в пределах:

$$\sigma_{\min} \le \sigma \le \sigma_{\max},$$

где $\sigma_{\min\,(\max)}$ — минимальное (максимальное) значение среднеквадратического отклонения для всех купленных ценных бумаг, т. е. min (max) из $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$.

Диверсификация портфеля при полной корреляции не дает положительного эффекта. Риск портфеля равен среднему арифметическому рисков отдельных бумаг и не стремится к нулю при увеличении количества бумаг ($n \to \infty$).

Портфель из антикоррелированных ценных бумаг

Рассмотрим упрощенный модельный случай, отражающий, впрочем, суть проблемы. Пусть портфель инвестора состоит из двух ценных бумаг, находящихся в состоянии обратной корреляции (или антикорреляции). Тогда, коэффициент корреляции между эффективностями 1-й и 2-й ценной бумагой равен –1: $k_{1\,2} = -1$. Отсюда, дисперсия, оценивающая риск портфеля, равна

$$V = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2 k_{12} x_1 x_2 =$$
$$= \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 = \left(\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2\right)^2.$$

Очевидно, если деньги инвестора разделены в пропорции $\sigma_1 x_1 = \sigma_2 x_2$, то риск портфеля равен нулю.

Учитывая, что $x_1 + x_2 = 1$, получим

$$x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad x_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Эффективность портфеля равна: $m = \dfrac{m_1\sigma_2 + m_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$

и будет лежать в пределах от min (m_1, m_2) до max (m_1, m_2).

Таким образом, при наличии антикорреляции возможен портфель инвестора с нулевым риском.

Часть 6. Оптимальный портфель при рискованных вложениях (H. Markovitz)

Можно составить две задачи оптимизации портфеля:

1. распределить средства, выделяемые на покупку ценных бумаг так, чтобы при фиксированной эффективности обеспечить минимальный риск;
2. распределить средства, выделяемые на покупку ценных бумаг так, чтобы при фиксированном риске обеспечить максимальное значение эффективности.

Математическая постановка задач следующая.

Задача 1. Минимизация риска.

Найти $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющие линейным ограничениям:

$x_1+x_2+...+x_n=1$ (уравнение баланса); (6.1)

$x_1m_1+x_2m_2+...+x_nm_n = m_s$

(фиксация эффективности) (6.2)

и минимизирующие квадратичную функцию риска

$$V = \sum_{i,\ j=1}^{n} x_i x_j v_{ij} \ . \qquad (6.3)$$

Задача 2. Максимизация эффективности.

Найти $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющие линейному ограничению:

$x_1+x_2+...+x_n=1$ (уравнение баланса); (6.1′)

и квадратичному ограничению

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} x_i x_j \upsilon_{ij} = V_1 \text{ (фиксация риска)} \qquad (6.2')$$

и максимизирующие линейную функцию

$m = x_1m_1+x_2m_2+...+x_nm_n$ (6.3′)

Приведенные задачи двойственны и приводят к одному и тому же решению.

Решение этих задач может содержать некоторые значения $x_k<0$. Это означает, что при формировании оптимального портфеля для покупки k-й ценной бумаги следует взять в долг сумму $-x_k$. Если портфель ценных бумаг уже существует, то следует продать пакет из k-х ценных на сумму $-x_k$.

Если в долг брать нельзя, то дополнительно к ограничениям равенствам в задаче оптимизации добавляются ограничения неравенства:

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0. \qquad (6.4)$$

Рассмотрим сначала задачу построения оптимального портфеля инвестора без ограничения неотрицательности переменных.

Если в задаче оптимизации портфеля на переменные не наложено условие неотрицательности, то задача имеет точное аналитическое решение.

Воспользуемся функцией Лагранжа.

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \upsilon_{ij} x_i x_j + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i - m_s\right), \qquad (6.5)$$

где

m_s — требуемое значение эффективности портфеля;

λ, μ — множители Лагранжа, которые будут найдены позже из линейных ограничений.

Приравнивая частные производные $\dfrac{\partial L}{\partial x_k}=0$, получим систему линейных уравнений для определения $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2\left(\upsilon_{11}x_1+\upsilon_{12}x_2+\cdots+\upsilon_{1n}x_n\right)+\mu+\lambda m_1=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2\left(\upsilon_{21}x_1+\upsilon_{22}x_2+\cdots+\upsilon_{2n}x_n\right)+\mu+\lambda m_2=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_k}=2\left(\upsilon_{k1}x_1+\upsilon_{k2}x_2+\cdots+\upsilon_{kn}x_n\right)+\mu+\lambda m_k=0 \qquad (6.6)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_n}=2\left(\upsilon_{n1}x_1+\upsilon_{n2}x_2+\cdots+\upsilon_{nn}x_n\right)+\mu+\lambda m_n=0$$

Далее удобно использовать матричные обозначения. Тогда (6.6) можно записать в виде:

$$2Vx = -\mu I - \lambda m, \qquad (6.7)$$

где

V — симметричная знакоположительная матрица ковариации размерности $n{\times}n$, равная

$$V=\begin{pmatrix}\upsilon_{11} & \upsilon_{12} & \cdots & \upsilon_{1n}\\ \upsilon_{21} & \upsilon_{22} & \cdots & \upsilon_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \upsilon_{n1} & \upsilon_{n2} & \cdots & \upsilon_{nn}\end{pmatrix} \qquad \upsilon_{ij}=\upsilon_{ji},$$

x — вектор-столбец неизвестных $n{\times}1$

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

I, m — векторы-столбцы $n\times 1$ вида

$$I=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix};\quad m=\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\\vdots\\m_n\end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись обратной матрицей V^{-1}, получим для вектора-столбца неизвестных формулу:

$$x=\frac{1}{2}V^{-1}\left(-\mu I-\lambda m\right). \tag{6.8}$$

Осталось определить множители Лагранжа из линейных ограничений, записываемых в матричном виде:

$$I^{*}x=1,\ m^{*}x=m_s, \tag{6.9}$$

где

m^{*}, I^{*} — векторы строки, получаемые из векторов-столбцов с помощью операции транспортирования, обозначаемой *.

Подставляя (6.8) в (6.9), получим систему линейных уравнений для определения μ, λ:

$$\begin{aligned}&-\frac{\mu}{2}I^{*}V^{-1}I-\frac{\lambda}{2}I^{*}V^{-1}m=1\\&-\frac{\mu}{2}m^{*}V^{-1}I-\frac{\lambda}{2}m^{*}V^{-1}m=m_s\end{aligned} \tag{6.10}$$

Вводя обозначения:

$$\begin{aligned}&a_{11}=I^{*}V^{-1}I,\\&a_{12}=I^{*}V^{-1}m=m^{*}V^{-1}I,\\&a_{22}=m^{*}V^{-1}m\end{aligned},$$

получим:

$$\begin{aligned}&-\frac{a_{11}}{2}\mu-\frac{a_{12}}{2}\lambda=1\\&-\frac{a_{12}}{2}\mu-\frac{a_{22}}{2}\lambda=m_s\end{aligned} \tag{6.11}$$

Решая методом Крамера систему (6.11), получим:

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{2} \\ m_s & -\dfrac{a_{22}}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\dfrac{a_{11}}{2} & -\dfrac{a_{12}}{2} \\ -\dfrac{a_{12}}{2} & -\dfrac{a_{22}}{2} \end{vmatrix}} = 2 \cdot \frac{a_{12} m_s - a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}$$

$$\lambda = \frac{4 \cdot \begin{vmatrix} -\dfrac{a_{11}}{2} & 1 \\ -\dfrac{a_{12}}{2} & m_s \end{vmatrix}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = 2 \cdot \frac{a_{12} - a_{11} m_s}{a_{11} a_{12} - a_{12}^2}$$

Подставляя в (6.8) найденные множители Лагранжа, получим оптимальную структуру портфеля в виде:

$$x = V^{-1} \frac{m_s\left(a_{11} m - a_{12} I\right) + a_{22} I - a_{12} m}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}. \qquad (6.12)$$

Из (6.12) видно, что x линейно зависит от m_s. Тогда риск, равный $x^* V x$ $\left(\sigma = \sqrt{x^* V x}\right)$ будет квадратичной выпуклой вниз функцией от m_s.

Рассмотрим теперь задачу минимизации функции риска, являющейся квадратичной формой неизвестных при двух линейных ограничениях и условии неотрицательности неизвестных.

Два линейных ограничения $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = m_s$ выделяют в n-мерном пространстве неизвестных подпространство $n-2$-мерной размерности, соответствующее независимым переменным.

В этом подпространстве n неравенств ($x_i \geq 0$) ограничивает некоторый выпуклый многогранник размерности $n-2$.

Минимизируемая функция является квадратичной знакоположительной, поэтому минимум может достигаться как внутри многогранника, так и на его границе.

Данная задача относится к проблеме квадратичного программирования, для решения которой разработаны специальные численные методы.

Эта задача может быть решена с использованием универсальных математических программных средств, например, Mathcad, Matlab, Maple или специальных программных средств, применяющих метод проекции градиента (Розена) и имеющихся в СЗАГС.

Часть 7. Оптимальный портфель ценных бумаг при безрисковых и рискованных вложениях (D. Tobin)

Ценные бумаги, входящие в портфель инвестора, можно разделить условно на две группы. В первую группу войдут ценные бумаги, имеющие малый риск и умеренную доходность. Во вторую группу войдут ценные бумаги, имеющие большую доходность и соответственно больший риск. Бумаги, имеющие малую доходность и больший риск, очевидно, не следует включать в портфель.

К безрисковым ценным бумагам условно можно отнести государственные ценные бумаги. В частности, на рынке США это вексель казначейства (US Treasury Bill), расписки казначейства (US Treasury Notes), бона казначейства (US Treasury bonds). В условиях 1990-х годов в России вряд ли какую-нибудь ценную бумагу можно считать безрисковой. Для этого периода следует использовать модель Г. Марковица (H. Markovitz), изложенную выше в п. 6. Учитывая тенденции к стабилизации экономики России в начале XXI века, следует рассчитывать на актуальность использования при оптимизации портфеля инвестора модели Тобина Д. (D. Tobin).

Тобин Д. рассмотрел следующую предельную ситуацию, когда инвестор выделяет x_0 денег на приобретение ценных бумаг с ожидаемой эффективностью r_0 и нулевым риском. Остальные $1-x_0$ денег инвестор тратит на рискованные ценные бумаги с ожидаемой эффективностью m_i большей, чем эффективность безрисковых бумаг r_0, т. е. $m_i > r_0$ (i=1, 2,..., n).

Математическая постановка задачи следующая.

Требуется найти распределение средств инвестора $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ между безрисковыми и рискованными бумагами 1, 2, ..., n такое, что выполняются следующие линейные ограничения:

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \text{ (уравнение баланса)} \qquad (7.1)$$

$$r_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n = m_s \qquad (7.2)$$

(фиксация ожидаемой суммарной эффективности от портфеля акций на уровне m_s)

и минимизируется средний риск, равный

$$\begin{aligned} V = \upsilon_{11} x_1^{\,2} + \upsilon_{22} x_2^{\,2} + \ldots + \upsilon_{nn} x_n^{\,2} + \\ +2(\upsilon_{12} x_1 x_2 + \upsilon_{13} x_1 x_3 + \ldots + \upsilon_{n-1,n} x_{n-1} x_n) \end{aligned} \qquad (7.3)$$

В матричном виде условие задачи запишется для линейных ограничений:

1. Уравнение баланса

$$I^* x + x_0 = 1, \qquad (7.1')$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$ — вектор столбец из 1;

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ — вектор столбец неизвестных;

I^* — транспонированный столбец или строка из 1.

2. Суммарная эффективность портфеля m_s:

$$m^* x + r_0 x_0 = m_s \, , \tag{7.2'}$$

где

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$ — вектор столбец из эффективностей 1, 2, ... n-й ценной бумаги.

Минимизируемый риск равен:

$$\Phi(x)=x^* Vx, \tag{7.3'}$$

где

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$ — ковариационная матрица $n \times n$.

Воспользуемся функцией Лагранжа для решения задачи

$$L = x^* Vx + \lambda(I^* x + x_0 - 1) + \mu(m^* x + r_0 x_0 - m_s) \, , \tag{7.4}$$

где

λ, μ — множители Лагранжа.

Минимум достигается в критической точке, в которой частные производные обращаются в ноль, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{7.5}$$

Первая частная производная (из 7.5) дает n условий, и вторая частная производная дает 1 условие. Таким образом, получается n+1 уравнений для определения n+1 неизвестного x, x_0.

После вычислений соответствующих производных получим уравнения:

$$\begin{aligned} & 2Vx + \lambda I + \mu m = 0 \\ & \lambda + \mu r_0 = 0 \end{aligned} \qquad (7.6)$$

Отсюда видно, что множители Лагранжа λ, μ линейно связаны:

$$\lambda = -\mu r_0 \,. \qquad (7.7)$$

Тогда, исключая из первого уравнения (7.6) множитель Лагранжа λ, используя обратную матрицу V^{-1} для определения x, получим:

$$x = \frac{\mu}{2} V^{-1} (I r_0 - m) \,. \qquad (7.8)$$

Осталось определить из ограничений множитель Лагранжа μ. Для этого найдем x_0 из первого ограничения (7.1')

$$x_0 = 1 - I^* x \qquad (7.9)$$

и второго ограничения (7.2')

$$x_0 = \frac{1}{r_0} (m_s - m^* x) \,. \qquad (7.10)$$

Приравнивая (7.9) и (7.10), получим:

$$1 - I^* x = \frac{1}{r_0} (m_s - m^* x) \,.$$

Отсюда,

$$(m - r_0 I)^* x = m_s - r_0 \,. \qquad (7.11)$$

Подставляя x из (7.8) в (7.11), получаем для множителя Лагранжа μ выражение:

$$\frac{\mu}{2} (m - r_0 I)^* V^{-1} (r_0 I - m) = m_s - r_0$$

или, окончательно,

$$\mu = -\frac{2(m_s - r_0)}{(m - r_0 I)^* V^{-1} (m - r_0 I)} \,. \qquad (7.12)$$

Тогда, избавляясь в (7.8) от множителя Лагранжа μ, получим явное выражение для x:

$$x = \frac{V^{-1}(m - r_0 I)}{(m - r_0 I)^* V^{-1}(m - r_0 I)}(m_s - r_0). \qquad (7.13)$$

В формуле (7.13) в числителе $V^{-1}(m - r_0 I)$ — вектор столбец, в знаменателе $(m - r_0 I)^* V^{-1}(m - r_0 I)$ — скаляр.

Важно, что величина m_s входит в решение для x в виде скалярного множителя $m_s - r_0$. Таким образом, доля средств x, выделяемых на рискованные бумаги, линейно зависит от m_s.

Структура рискованных вложений, определяемая отношением вложения x_k в k-ю ценную рискованную бумагу к суммарному вложению в рискованные бумаги $\sum_{i=1}^{n} x_i$, задается вектором:

$$\frac{x}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и не зависит от суммарной доходности m_s.

Действительно, учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = I^* x = \frac{I^* \ V^{-1}(m - r_0 I)}{(m - r_0 I)^* V^{-1}(m - r_0 I)}(m_s - r_0), \qquad (7.14)$$

получаем для структуры вложений из (7.13) и (7.14):

$$\frac{x}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{V^{-1}(m - r_0 I)}{I^* \ V^{-1}(m - r_0 I)}. \qquad (7.15)$$

Оценим теперь суммарный риск для оптимального решения, т. е. найдем дисперсию (вариацию) оптимального портфеля ценных бумаг. Подставляя (7.13) в (7.3') получим для оценки суммарного риска дисперсию (вариацию), равную

$$\sigma_s^2 = x^* V x = \frac{(m - r_0 I)^* V^{-1} V V^{-1} (m - r_0 I)}{((m - r_0 I)^* V^{-1} (m - r_0 I))^2} \cdot (m_s - r_0)^2$$

Окончательно:

$$\sigma_s^2 = g^{-2} (m_s - r_0)^2, \qquad (7.16)$$

где $g^2 = (m - r_0 I)^* V^{-1} (m - r_0 I)$ — положительное число в силу знакоположительности матрицы ковариаций V и обратной к ней матрицы V^{-1}. Отсюда следует, что среднеквадратическое отклонение риска σ_s линейно связано с ожидаемой эффективностью оптимального портфеля m_s. Точнее из (7.16) имеем:

$$\sigma_s = g^{-1} (m_s - r_0), \qquad (7.17)$$

или

$$m_s = r_0 + g \quad \sigma_s. \qquad (7.18)$$

Таким образом, ожидаемая эффективность m_s пропорциональна среднеквадратическому отклонению риска σ_s.

Рассмотрим плоскость: по оси абсцисс отложим ожидаемую эффективность m_s портфеля ценных бумаг, по оси ординат отложим среднеквадратическое отклонение риска σ_s. На этой плоскости в силу (7.17) связь между σ_s и m_s определяется прямой линией, пересекающей ось абсцисс в точке r_0 (см. рис. 7.1). Наклон этой прямой определяется коэффициентом g^{-1}.

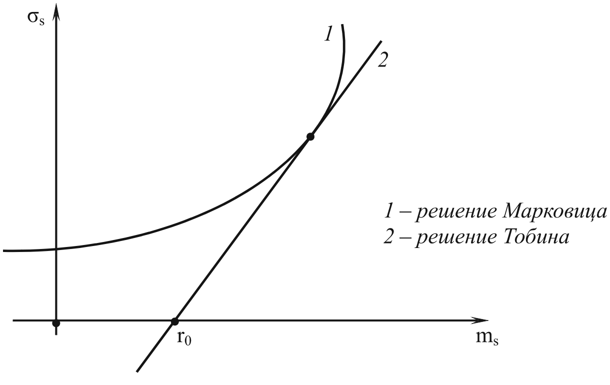

Рис. 7.1

С другой стороны, при $x_0 = 0$ оптимальный портфель состоит только из рискованных бумаг. Следовательно, он будет оптимальным для рассмотренной в п. 6 задачи Марковца оптимизации портфеля рискованных ценных бумаг. Теперь, если на рис. 7.1 изобразить зависимость риска σ_s от m_s для задачи Марковца, то прямая и график $\sigma_s(m_s)$ будут иметь общую точку. График $\sigma_s(m_s)$ — выпуклая вниз кривая. Решение обеих задач — Марковца и Тобина — единственно. Следовательно, прямая (7.17) и кривая $\sigma_s(m_s)$ для задачи Марковца будет пересекаться в единственной точке, соответствующей точке касания.

Таким образом, если имеется возможность выбирать не только между заданным рискованным портфелем и безрисковыми ценными бумагами, но одновременно выбирать структуру рискованного портфеля, то оптимальной окажется только одна такая структура, независимо от склонности инвестора к риску.

Пусть кроме линейных ограничений (7.1) и (7.2) имеются ограничения в виде неравенств $x_0 \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0$, что соответствует запрету на получение денег в долг для покупки ценных бумаг.

Тогда, задача построения оптимального портфеля ценных бумаг, аналогично п. 6, может быть решена численными методами с использованием универсальных математических программных средств Mathcad, Matlab, Maple или специальных программных средств, применяющих метод проекции градиента (Розена) и имеющихся в СЗАГС.

Оценим вклад каждой ценной бумаги, вошедшей в оптимальный портфель, в общую эффективность портфеля. Эффективность оптимального портфеля является случайной величиной, равной

$$R^+ = r_0 x_0^+ + \sum_{i=1}^{n} R_i x_i^+ = r_0 x_0^+ + R^* x_i^+ \qquad (7.19)$$

где

$R^* = (R_1, R_2, ..., R_n)$ — случайный вектор, составленный из случайных эффективностей,

x^+ — структура оптимального портфеля ценных бумаг, равная согласно (7.13)

$$x^+ = \frac{V^{-1}(m - r_0 I)}{(m - r_0 I)^* V^{-1}(m - r_0 I)}(m_s - r_0)$$

где x_0^+ — количество средств, выделяемых на безрисковую ценную бумагу, для оптимального портфеля равное $x_0^+ = 1 - (x_1^+ + x_2^+ + ... + x_n^+)$.

Таким образом, величины x^+, x_0^+, r_0 являются детерминированными, а величины Ri — случайными.

Тогда, математическое ожидание эффективности для оптимального портфеля равно $m_s = r_0 x_0^+ + m^* x^+$.

Отсюда разность между случайной эффективностью и средней эффективностью оптимального портфеля равна

$$R^+ - m_s = (R - m)^* x^+ \qquad (7.20)$$

Вычислим величину β_j, именуемую «бета вклада j-й ценной бумаги относительно оптимального портфеля». По определению она равна

$$\beta_j = \frac{E((R_j - m_j)(R^+ - m_s))}{\sigma_s^2} \qquad (7.21)$$

где $E((R_j - m_j)(R^+ - m_s))$ — ковариация эффективности j-й ценной бумаги и эффективности оптимального портфеля.

$r_s^2 = (x^+)^* V x^+$ — дисперсия оптимального портфеля.

С другой стороны, для β_j можно дать следующее эквивалентное определение, частично проясняющее суть этой величины. Центрируем эффективность j-й ценной бумаги и эффективность оптимального портфеля, то есть от случайных величин R_j и R^+ переходим к центрированным случайным величинам $R_j - m_j$ и $R^+ - m_s$.

Покажем, что β_j является коэффициентом в линейной регрессии

$$R_j - m_j = \beta_j (R^+ - m_s) \qquad (7.22)$$

Действительно, найдем β_j методом наименьших квадратов, то есть β_j должен обеспечивать минимум дисперсии разности

$$\Phi(\beta_j) = E(((R_j - m_j) - \beta_j (R^+ - m_s))^2) \qquad (7.23)$$

Раскрывая (7.23), получим для дисперсии

$$\begin{aligned}
\Phi(\beta_j) &= E((R_j - m_j)^2) + \beta_j^2 E((R^+ - m_s)^2) - \\
&- 2\beta_j E((R_j - m_j)(R^+ - m_s)) = \\
&= \sigma_j^2 + \beta_j^2 \sigma_s^2 - 2\beta_j E((R_j - m_j)(R^+ - m_s))
\end{aligned} \qquad (7.24)$$

где σ_j — дисперсия (риск) j-й ценной бумаги, σ_s^2 — дисперсия (риск) оптимального портфеля,

$E((R_j - m_j)(R^+ - m_s))$ — ковариация эффективности j-й ценной бумаги и эффективности оптимального портфеля.

Приравняв производную от дисперсии (7.24) по β_j нулю, получим линейное уравнение, которое дает выражение для β_j в виде (7.21).

Если вспомнить, что ковариация связана с коэффициентом корреляции по формуле

$$E((R_j - m_j)(R^+ - m_s)) = \sigma_j \sigma_s K_{js} \qquad (7.25)$$

где σ_j — среднеквадратическое отклонение j-й ценной бумаги, σ_s — среднеквадратическое отклонение оптимального портфеля, K_{js} — коэффициент корреляции между эффективностью j-й ценной бумаги и эффективностью портфеля ценных бумаг.

Тогда из (7.21) имеем

$$\beta_i = \frac{\sigma_j}{\sigma_S} \cdot K_{jS} \qquad (7.26)$$

Таким образом, β_j — «бета вклад j-й ценной бумаги относительно оптимального портфеля» может с этой точки зрения рассматриваться как отношение среднеквадратических отклонений, умноженных на коэффициент корреляции.

Для выяснения экономического смысла рассмотрим β_j с третьей точки зрения. Воспользуемся определением (7.21) и формулой (7.20). Вводя вектор столбец β, состоящий из всех коэффициентов β_j, β_j ... β_n, получим из (7.21) и (7.20)

$$\beta = \frac{1}{\sigma_S^2} \cdot \mathrm{E}\Big(\big(R - m\big) \cdot \big(R^+ - m_S\big)\Big) = \frac{1}{\sigma_S^2} \cdot \mathrm{E}\Big(\big(R - m\big) \cdot \big(R - m\big)^* \cdot x^+\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_S^2} \cdot \mathrm{E}\Big(\big(R - m\big) \cdot \big(R - m\big)^*\Big) \cdot x^+ = \frac{1}{\sigma_S^2} \cdot V \cdot x^+$$

где $V = E((R - m)(R - m)^*)$ — ковариационная матрица размерности $n \times n$ для ценных бумаг (см. (7.31)).

Таким образом,

$$\beta = \frac{1}{\sigma_S^2} \cdot V \cdot x^+ \qquad (7.27)$$

учитывая структуру оптимального портфеля

$$x^+ = \frac{V^{-1} \cdot \left(m - r_0 \cdot I\right)}{\left(m - r_0 \cdot I\right)^* \cdot V^{-1} \cdot \left(m - r_0 \cdot I\right)} \cdot \left(m_S - r_0\right)$$

и структуру дисперсии оптимального портфеля

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{\left(m - r_0 \cdot I\right)^* \cdot V^{-1} \cdot \left(m - r_0 \cdot I\right)} \cdot \left(m_S - r_0\right)^2$$

получим для

$$\beta = \frac{m - r_0 \cdot I}{m_S - r_0} \qquad (7.28)$$

или

$$\left(m - r_0\right) \cdot I = \beta\left(m_S - r_0\right)$$

окончательно в скалярной форме

$$m_j - r_0 = \beta_j\left(m_S - r_0\right) \qquad (7.29)$$

Отсюда следует важный вывод: премия за риск любой ценной бумаги, включенной в оптимальный портфель, пропорциональна премии за риск, связанный с оптимальным портфелем в целом, при этом коэффициент пропорциональности равен β_j .

Заключение

В заключении отметим, что в СЗАГС разработаны и используются в учебном процессе специализированные программы для финансовых расчетов и оценок финансовых рисков. Кроме того, в СЗАГС имеются методики, позволяющие решать указанные выше задачи универсальными программными математическими средствами Matcad, Matlab и Maple.

Оглавление

Учебно-методический комплекс по курсу

«ФИНАНСОВЫЙ РЫНОК: РАСЧЕТ И РИСК»

Редактор С. В. Чубинская-Надеждина

Комплекс издательских и полиграфических работ выполнен ООО «Полиграфуслуги»
Издательский дом «Виктория плюс»

Подписано в печать 24.12.2004 г.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Гарнитура PragmaticaC, PetersburgC. Усл. печ. л. 6. Тираж 100 экз.

VICTORY